А.В. Словеснов

КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

МАТРИЧНЫЙ АППАРАТ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МОСКВА, 2018

УДК,ББК, ISBN

Рецензенты:
С.Н. Михалев, А.Н. Попов, С.С. Пухов

Оглавление

Предисловие **7**

I Матричный аппарат **9**

Лекция 1. Действия с матрицами 9

§ 1.1. Матричные операции 10

§ 1.2. Матрицы специального вида 14

§ 1.3. Типовые задачи 17

Лекция 2. Системы линейных уравнений 26

§ 2.1. Матричная запись линейных систем 27

§ 2.2. Элементарные преобразования матриц 29

§ 2.3. Типовые задачи 32

Лекция 3. Метод Гаусса 41

§ 3.1. Приведение матрицы к ступенчатому виду 42

§ 3.2. Критерии совместности и определенности 45

§ 3.3. Типовые задачи 48

Лекция 4. Основные свойства определителей 61

§ 4.1. Определитель и элементарные преобразования . . 65

§ 4.2. Определитель и матричные операции 68

§ 4.3. Типовые задачи 71

Лекция 5. Методы вычисления определителей 79

§ 5.1. Разложение определителя 80

§ 5.2. Приложения определителей 87

§ 5.3. Типовые задачи 91

Лекция 6. Линейная зависимость векторов 102

§ 6.1. Критерии линейной зависимости 105

§ 6.2. Базис системы векторов 110

§ 6.3. Типовые задачи 113

Лекция 7. Выбор базисных элементов 123

§ 7.1. Ранг матрицы 124

§ 7.2. Матрица перехода 128

§ 7.3. Типовые задачи 131

II Аналитическая геометрия **141**

Лекция 8. Векторная алгебра 141

§ 8.1. Скалярное произведение векторов 143

§ 8.2. Векторное и смешанное произведение 148
§ 8.3. Типовые задачи 153

Лекция 9. Метод координат на плоскости 164
§ 9.1. Прямая, окружность, парабола 166
§ 9.2. Описание областей 172
§ 9.3. Типовые задачи 176

Лекция 10. Метод координат в пространстве 185
§ 10.1. Плоскость, прямая, сфера 186
§ 10.2. Пучки сфер и плоскостей 191
§ 10.3. Типовые задачи 196

Лекция 11. Кривые и поверхности 206
§ 11.1. Описание пространственной кривой 208
§ 11.2. Цилиндрические и конические поверхности . . . 212
§ 11.3. Типовые задачи 217

Лекция 12. Геометрия эллипса и гиперболы 227
§ 12.1. Каноническая система координат 229
§ 12.2. Оптическое свойство 234
§ 12.3. Типовые задачи 237

Лекция 13. Замена координат на плоскости 247
§ 13.1. Ортогональные замены координат 249

§ 13.2. Преобразование квадратичных форм 253
§ 13.3. Типовые задачи 256

Лекция 14. Кривые второго порядка 266
§ 14.1. Ортогональная классификация 269
§ 14.2. Инварианты 272
§ 14.3. Типовые задачи 277

Ответы и указания **289**

Литература **300**

Предисловие

Настоящее учебное пособие адресовано студентам естественных специальностей, стремящихся разобраться в теоретических основах линейной алгебры и аналитической геометрии и желающих познать их эффективность и практическую значимость. Оно не претендует на звание классического учебника или полноценного сборника задач, но сочетает в себе все необходимые для обучения элементы: конспекты лекций, разбор типовых примеров и комплекс упражнений для самостоятельной работы. Абсолютное большинство предлагаемых задач не является изобретением автора, а было заимствовано из учебной литературы, указанной в конце книги. Изложение, за некоторыми исключениями, ведется на строгом математическом языке и по необходимости снабжается иллюстрациями.

Содержание основано на курсе линейной алгебры, разработанном автором для студентов химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, и рассчитано для сопровождения занятий в течение осеннего семестра первого курса. В первой части обсуждаются основные матричные операции и техника вычисления определителей, в качестве приложений рассматриваются различные приемы решения систем линейных уравнений и исследования линейной зависимости. Во второй части последовательно развивается метод координат на плоскости и в пространстве, приводятся базовые сведения о кривых второго порядка и на доступных примерах демонстрируются возможности алгебраического подхода в геометрии.

В тексте используются стандартные логические связки и обозначения теории множеств:

- $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ — следствие и равносильность,
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа,
- $\cap, \cup, \subset$ — операции пересечения, объединения и включения,
- $\exists, \forall$ — кванторы существования и всеобщности;

а также некоторые специальные символы:

- $\square, \blacksquare$ — начало и завершение доказательств,
- $\circlearrowleft, \circlearrowright$ — оформление поясняющих примеров.

Автор выражает искреннюю признательность рецензентам за тщательное прочтение рукописи, полезные замечания и ценные советы по содержанию, а также М.М. Суичмезов за добросовестную корректорскую работу и конструктивные предложения по оформлению текста в целом.

А. Словеснов

Глава I
Матричный аппарат

1 Действия с матрицами

В первой части курса распространяется действие стандартных арифметических операций с привычных читателю чисел до специальных объектов, которые называются *матрицами*. Многие правила вычисления и их свойства остаются неизменными, приобретая несколько иной вид, однако при работе с матрицами возникают особые случаи, в которых расхождения с числами становятся существенными.

Преимущества использования матричного аппарата проявляются в задачах, связанных с исследованием зависимости между большим количеством неизвестных. В этих задачах матричная запись присутствующих закономерностей позволяет существенно сократить сопутствующие выкладки и представить особенности постановки, тонкости и нестандартные идеи решения в наглядном виде.

С практической точки зрения матричный аппарат оказывается незаменимым при решении систем линейных уравнений, а также реализации метода координат на плоскости и в пространстве. Помимо непосредственных математических приложений, матрицы на-

ходят эффективное применение в нахождении стехиометрических коэффициентов реакций, определении параметров межотраслевого экономического баланса, построении алгоритмов шифрования.

Определение. *Матрицей* размера $n \times k$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из n строк и k столбцов. Числа, образующие матрицу, называются ее *элементами*, а пара $n \times k$ — размерностью. Если количество строк матрицы совпадает с количеством столбцов, то говорят о *квадратной* матрице, в противном случае — о *прямоугольной*.

Для обозначения матриц, как правило, используют заглавные латинские буквы A, B, C, а для обозначения ее элементов — соответствующие прописные буквы с двумя нижними индексами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}. Первый из них отражает номер строки, в которой расположен элемент, а второй — номер столбца. В связи с этим матрица может иметь следующие описания:

$$A = \{a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k\} \quad \text{или} \quad A_{n\times k} = \{a_{ij}\}.$$

$\circlearrowleft$ Пусть $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ — прямоугольная матрица размера 2×3. Тогда ее элементами будут следующие числа: $a_{11} = -2,\ a_{12} = 3,\ a_{13} = 0,\ a_{21} = 1,\ a_{22} = -1,\ a_{23} = 2.$ $\circlearrowright$

Для матриц, как для и чисел/векторов, можно определить арифметические операции сложения, вычитания и умножения на число, а также специальные операции умножения и транспонирования. Все они наследуют многие числовые свойства, однако матричное исчисление, как отмечалось выше, обладает своей спецификой.

1.1 Матричные операции

Операции сложения/вычитания матриц и умножения матрицы на число осуществляются, по аналогии с векторами, поэлементно.

Определение. Пусть A и B — матрицы размера $n \times k$, а λ — некоторое число. Тогда *суммой/разностью* матриц $A \pm B$ называется матрица C того же размера $n \times k$, элементы которой суть суммы (разности) соответствующих элементов матриц A и B:

$$A \pm B = \{a_{ij} \pm b_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k\}.$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица D того же размера $n \times k$, элементы которой суть произведения λ на соответствующие элементы матрицы A:

$$\lambda \cdot \{a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k\} = \{\lambda \cdot a_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k\}.$$

Стоит отметить, что при сложении двух матриц их размеры должны совпадать.

↻ Определим матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и вычислим следующую комбинацию:

$$2A - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \ ↺$$

Определение. Пусть A — матрица размера $n \times k$. Матрица B размера $k \times n$ называется *транспонированной* к A (или получается путем *транспонирования из матрицы* A) и обозначается A^T, если $a_{ij} = b_{ji}$ $(\forall i, j \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k)$. Другими словами, строки матрицы B совпадают со столбцами матрицы A и наоборот.

↻ Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $B = A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. ↺

Заметим, что операция транспонирования, примененная к матрице дважды, приводит ее к первоначальному виду: $\left(A^T\right)^T = A$.

Определим теперь важнейшую в теории матриц операцию умножения. Она является обобщением правил умножения обычных чисел, однако само ее определение потребует нетривиального подхода, а исполнение — довольно громоздких вычислений. Более того, данная операция будет обладать на первый взгляд неожиданными свойствами.

Определение. Пусть A — матрица размера $n \times k$, B — матрица размера $k \times l$. Тогда произведением матриц $A \cdot B$ называется матрица C размера $n \times l$, общий элемент которой c_{ij} есть скалярное произведение строки с номером i первого сомножителя и столбца с номером j второго сомножителя:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant l.$$

Таким образом, при умножении двух матриц количество столбцов первого сомножителя должно совпадать с количеством строк второго. Другими словами, умножение матриц, в отличие от умножения чисел, допустимо не для всякой пары матриц. Но еще более важной особенностью этой операции является зависимость от порядка сомножителей.

$\circlearrowleft$ Рассмотрим матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и вычислим их произведения:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \ \circlearrowright$$

В общем случае результаты произведений $A \cdot B$ и $B \cdot A$, даже при условии их определенности, будут различаться. Тем не менее, в исключительных ситуациях равенство $A \cdot B = B \cdot A$ возможно.

Определение. Матрицы A и B являются *перестановочными* (матрицы A и B *коммутируют*), если имеет место равенство $A \cdot B = B \cdot A$.

$\circlearrowleft$ Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ являются перестановочными, поскольку $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. $\circlearrowright$

При оперировании с матрицами очень удобной оказывается запись $\sum_{j=k}^{n} a_j$, обозначающая сумму однотипных слагаемых. Она эквивалентна многоточию и является его компактным аналогом:

$$\sum_{j=k}^{n} a_j = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Например, элемент произведения двух матриц может быть записан в виде $(A_{n\times k} \cdot B_{k\times l})_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj}$, а сумма всех элементов матрицы $A_{n\times k}$ может быть представлена формулой $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij}$.

Теорема 1.1. *Операция умножения матриц является ассоциативной, т.е. для любой тройки матриц $A_{n\times k}$, $B_{k\times l}$, $C_{l\times m}$ имеет место равенство $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.*

$\square$ Введем обозначения $D_{n\times l} = A \cdot B$ и $E_{k\times m} = B \cdot C$ и докажем равенство $D \cdot C = A \cdot E$. Используя определение, выпишем общий элемент произведения $D \cdot C$:

$$(D \cdot C)_{ij} = d_{i1} \cdot c_{1j} + d_{i2} \cdot c_{2j} + \cdots + d_{i,\,l-1} \cdot c_{l-1,\,j} + d_{il} \cdot c_{lj}.$$

Так как матрица D представляет собой произведение $A \cdot B$, то в полученном равенстве мы можем заменить элементы d_{it}, $1 \leqslant t \leqslant l$, соответствующими суммами:

$$(D \cdot C)_{ij} = \Big(a_{i1} \cdot b_{11} + a_{i2} \cdot b_{21} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{k1}\Big) \cdot c_{1j} +$$

$$+\Big(a_{i1}\cdot b_{12}+a_{i2}\cdot b_{22}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{k2}\Big)\cdot c_{2j}+\ldots$$

$$\ldots+\Big(a_{i1}\cdot b_{1l}+a_{i2}\cdot b_{2l}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kl}\Big)\cdot c_{lj}.$$

Перегруппируем слагаемые, вынеся за скобки элементы $a_{i1},\ldots,a_{ik}$:

$$(D\cdot C)_{ij}=a_{i1}\cdot\Big(b_{11}\cdot c_{1j}+b_{12}\cdot c_{2j}+\ldots+b_{1l}\cdot c_{lj}\Big)+$$

$$+\ldots+a_{ik}\cdot\Big(b_{k1}\cdot c_{1j}+b_{k2}\cdot c_{2j}+\ldots+b_{kl}\cdot c_{lj}\Big).$$

Суммы, стоящие в скобках, суть элементы произведения $B\cdot C$, поэтому

$$(D\cdot C)_{ij}=a_{i1}\cdot e_{1j}+\ldots+a_{ik}\cdot e_{kj}=(A\cdot E)_{ij}.$$

Последнее равенство означает, что элементы матриц $D\cdot C$ и $A\cdot E$ совпадают. ■

Для полноты изложения представим то же доказательство с использованием знака $\sum$:

$$\sum_{t=1}^{l}d_{it}c_{tj}=\sum_{t=1}^{l}c_{tj}\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{st}=\sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{k}c_{tj}a_{is}b_{st}=$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{l}c_{tj}a_{is}b_{st}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}\sum_{t=1}^{l}b_{st}c_{tj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}e_{sj}.$$

Конечно, последние выкладки являются менее наглядными, непривычными, однако со временем применение символа $\sum$ входит в привычку и становится по-настоящему необходимым.

1.2 Матрицы специального вида

Приведем примеры квадратных матриц специального вида, которые будут часто встречаться в дальнейшем изложении, и обсудим некоторые их свойства.

Определение. Матрица $D_{n\times n}(\lambda)$ называется *скалярной*, если ее элементы удовлетворяют равенству $d_{ij} = \begin{cases} \lambda, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. В случае $\lambda = 1$ говорят о *единичной* матрице и используют обозначения E или I.

Название единичной матрицы обусловлено ее спецификой относительно операции умножения — она играет роль числовой единицы.

Теорема 1.2. *Для любой квадратной матрицы A имеет место равенство $A \cdot E = E \cdot A = A$.*

Доказательство этого утверждения не представляет сложности, поэтому оно предоставляется в качестве упражнения. Приведем более тонкое утверждение, которое в некотором смысле обращает теорему 1.2 и определяет характеристическое свойство скалярных матриц.

Теорема 1.3. *Если равенство $A \cdot D = D \cdot A$ выполняется для любой квадратной матрицы A, то матрица D — скалярная.*

□ Приведем доказательство для квадратных матриц размера 2×2, поскольку в общем случае простая идея доказательства затуманивается объемными выкладками. Пусть $D_{2\times 2} = \{d_{ij}\}$ и для любой квадратной матрицы A произведения $A \cdot D$ и $D \cdot A$ совпадают. Рассмотрим матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и умножим их на матрицу D слева и справа:

$$A_1 \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{21} & d_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D \cdot A_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d_{11} \\ 0 & d_{21} \end{pmatrix};$$

$$A_2 \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_{11} & d_{12} \end{pmatrix},$$

$$D \cdot A_2 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{12} & 0 \\ d_{22} & 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты произведений не будет зависеть от порядка сомножителей только в том случае, если $d_{11} = d_{22},\ d_{12} = d_{21} = 0$. Это означает, что матрица D должна быть скалярной. ■

Уникальное свойство единичной матрицы позволяет ввести важное определение *обратной* матрицы. Обратная матрица имеет многочисленные приложения и заслуживает особого внимания. Здесь мы ограничимся лишь определением, представив основное изложение позже.

Определение. Квадратные матрицы $A_{n\times n}$ и $B_{n\times n}$ являются *взаимнообратными*, $B = A^{-1} \Leftrightarrow A = B^{-1}$, если имеет место равенство $A \cdot B = B \cdot A = E$.

В данном определении неявно присутствует утверждение единственности обратной матрицы, которое нуждается в проверке.

Лемма 1.4. *Обратная матрица, если существует, единственна.*

□ Рассмотрим квадратную матрицу A и предположим, что существуют две матрицы B_1 и B_2, обратные к A. Тогда, используя определение обратной матрицы и свойство ассоциативности умножения, получаем следующее равенство:

$$B_1 = B_1 \cdot E = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2.$$

Таким образом, матрицы B_1 и B_2 совпадают. ■

В заключение приведем еще один пример матрицы специального вида, которая часто встречается в аналитической геометрии и также определяется с помощью единицы.

Определение. Матрица $C_{n\times n}$ называется *ортогональной*, если

$$C^T \cdot C = C \cdot C^T = E \quad \Leftrightarrow \quad C^{-1} = C^T.$$

1.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Решить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ 3X + 4Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Решение. Выразим матрицу X из первого уравнения

$$2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad X = -\frac{3}{2}Y + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

и подставим полученное представление во второе уравнение:

$$3X + 4Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}Y + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) + 4Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известные матрицы собираем в правой части уравнения, а в левой — приводим подобные, содержащие матрицу Y:

$$-\frac{9}{2}Y + 4Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножив обе части уравнения на -2, определим значение переменной Y:

$$Y = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Теперь подставим последнюю матрицу в выражение для переменной X:

$$X = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найти какую-нибудь матрицу $A_{2\times 2}$, удовлетворяющую равенству $A^2 = -E$ (являющуюся корнем уравнения $x^2 = -1$).

Решение. Обозначим элементы искомой матрицы A буквами a, b, c, d и распишем равенство $A^2 = -E$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ ab + bd = 0 \\ ac + dc = 0 \\ bc + d^2 = -1 \end{cases}.$$

Поскольку искать все решения не требуется, мы можем подобрать, например, числа $a = 0,\ b = -1,\ c = 1,\ d = 0$. Необходимо отметить, что найденный матричный корень уравнения $x^2 = -1$ не будет единственным. Полученной системе удовлетворяют также, например, числа $a = 0,\ b = 1,\ c = -1,\ d = 0$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Элементы прямоугольной матрицы $A_{21\times 31}$ определены равенством $a_{ij} = i + j$. Вычислить сумму всех ее элементов.

Решение. Построим вспомогательную матрицу $B_{21\times 31}$ того же размера, определив ее элементы формулой $b_{ij} = a_{22-i,32-j}$, $1 \leqslant i \leqslant 21$, $1 \leqslant j \leqslant 31$. Числа b_{ij} получены перестановкой исходных чисел a_{ij}, которая выражается отражением относительно средней строки и среднего столбца. Сами числа, а следовательно, и их сумма при этом не меняются, то имеет место равенство

$$S = \sum_{i=1}^{21}\sum_{j=1}^{31} a_{ij} = \sum_{i=1}^{21}\sum_{j=1}^{31} b_{ij} \quad \Rightarrow \quad 2S = \sum_{i=1}^{21}\sum_{j=1}^{31}(a_{ij} + b_{ij}).$$

Поскольку все слагаемые последней суммы равны между собой

$$a_{ij} + b_{ij} = a_{ij} + a_{22-i,32-j} = (i + j) + (22 - i + 32 - j) = 54,$$

то ее значение совпадает с произведением

$$\sum_{i=1}^{21}\sum_{j=1}^{31}(a_{ij} + b_{ij}) = 21 \cdot 31 \cdot 54 = 35154.$$

Последнее равенство приводит нас к ответу

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{21}\sum_{j=1}^{31}(a_{ij} + b_{ij}) = 17577.$$

Ответ: 17577.

Пример 4. Найти критерий обратимости матрицы размера 2×2.

Решение. Рассмотрим произвольную матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и выясним, при каких условиях на ее коэффициенты можно подобрать матрицу $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$, удовлетворяющую матричному уравнению $A \cdot B = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перепишем последнее равенство в виде

системы линейных уравнений относительно переменных x, y, z, w

$$A\cdot B = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \\ az+bw=0 \\ cz+dw=1 \end{cases},$$

которая фактически распадается на две независимые системы относительно пар (x, y) и (z, w):

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} az+bw=0 \\ cz+dw=1 \end{cases}.$$

Обе решаются путем исключения переменных: сначала первое уравнение домножим на d, второе домножим на $-b$ и сложим; затем первое домножим на $-c$, второе домножим на a и снова сложим:

$$\begin{cases} (ad-bc)x=d \\ (ad-bc)y=-c \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (ad-bc)z=-b \\ (ad-bc)w=a \end{cases}.$$

Если число $ad-bc$ отлично от нуля, то из полученных уравнений мы можем однозначно определить числа x, y, z, w:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Если же $ad-bc=0$ и хотя бы одно из чисел a, b, c, d отлично от нуля, то полученные уравнения оказываются несовместными, а матрица A — необратимой. В исключительном случае $a=b=c=d=0$ матрица A становится нулевой и обратной, разумеется, также не имеет.

Ответ: квадратная матрица размера 2×2 является обратимой тогда и только тогда, когда произведение элементов ее главной диагонали не равно произведению элементов побочной диагонали.

Пример 5. Решить матричное уравнение $A\cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся результатами предыдущей задачи и выпишем для первого сомножителя левой части уравнения обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4\cdot 1-(-3)\cdot(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

После этого домножим на нее исходное уравнение *слева*:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}$.

Пример 6. Найти все матрицы X размера 2×2, для которых сумма диагональных элементов произведения AX равна нулю для любой квадратной матрицы A того же размера.

Решение. Введем обозначения для элементов матриц A и X

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

и вычислим сумму S диагональных элементов произведения AX:

$$(AX)_{11} = ax + bz, \;\; (AX)_{22} = cy + dw \;\Rightarrow\; S = ax + bz + cy + dw.$$

Из условия задачи следует, что равенство $S = 0$ должно выполняться для любых чисел a, b, c, d, поэтому мы вправе подставить вместо них произвольные числа. Рассмотрев, например, четверку

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0,$$

мы получим равенство

$$S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot x + 0 \cdot z + 0 \cdot y + 0 \cdot w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Последовательная подстановка вместо (a, b, c, d) наборов чисел

$$(0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 1)$$

приводит нас к ответу: $y = z = w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 7. Найти все натуральные степени матрицы $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Решение. Рассмотрим несколько первых степеней матрицы A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Если продолжить вычислительный процесс, можно заметить следующую закономерность:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Справедливость этого равенства для всех натуральных чисел n можно установить методом математической индукции. База индукции проверяется простой подстановкой $n = 1$:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} a^1 & 1 \cdot a^{1-1} \\ 0 & a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

При этом индуктивный переход выполняется с помощью непосредственных вычислений:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Доказать равенства:

а) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$; б) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

3. Вычислить $A \cdot A^T - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Доказать, что для квадратных матриц A и B выполняется равенство $tr(AB) = tr(BA)$.

Указание. След матрицы равен сумме диагональных элементов.

5. Доказать, что любую матрицу $A_{n\times n}$ можно представить, притом единственным образом, в виде $A = B + C$, где B — симметрическая матрица ($B = B^T$), а C — кососимметрическая ($C = -C^T$).

6. Найти все матрицы, которые являются перестановочными по

отношению к данным:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Найти значение многочлена $P(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание. $P(A) = A^3 - 7A^2 + 13A - 5E$.

8. Доказать, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0.$$

9. Найти матрицы, обратные к данным:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ среди матриц размера 2×2.

11. Найти все ортогональные матрицы размера 2×2.

12. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

13. Доказать, что матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ не имеет обратной.

14. Пусть A и B — обратимые матрицы. Доказать, что

а) произведение AB также обратимо, причем $\Big(AB\Big)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

б) следующие равенства эквивалентны:

$$AB = BA, \quad AB^{-1} = B^{-1}A, \quad A^{-1}B = BA^{-1}, \quad A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

15. Найти все натуральные степени данных матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

2 Системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений, конечно, не нуждаются в своем представлении. К ним сводятся многие задачи экономического содержания, связанные с начислением процентов и оптимальным распределением ресурсов, геометрические исследования линейной зависимости, расчет простейших химических реакций и абсолютное большинство текстовых задач на движение и работу, изучаемых в школе.

Отличительной чертой приведенных выше приложений является априорная *определенность* или однозначная разрешимость. Нестрого говоря, все перечисленные примеры соответствуют системам уравнений, число которых совпадает с числом неизвестных, вследствие чего они обладают единственным решением. В общем же случае система описывает зависимость между огромным числом параметров и не подразумевает каких-либо ограничений на размерность.

Основной подход к решению линейных систем представляет собой последовательное исключение переменных. В рамках школьной программы он реализуется либо методом подстановки, либо в виде подбора подходящей комбинации исходных уравнений. Такой способ оказывается оправданным при малом числе неизвестных и теряет свою значимость в задачах с большим количеством параметров, в которых главная роль отводится матричным методам.

Система, состоящая из k уравнений, относительно n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется линейной, если она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{1}$$

Числа $a_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant n$, называются коэффициентами системы, а столбцы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ — вектором неизвестных и правой частью системы соответственно. Если правая

часть равна нулю, то есть $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ называется решением системы (1), если при подстановке этих чисел вместо соответствующих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каждое уравнение системы (1) превращается в верное числовое равенство. Две системы линейных уравнений относительно одних и тех же переменных *эквивалентны*, если любое решение первой системы является решением второй и наоборот.

2.1 Матричная запись линейных систем

При решении систем линейных уравнений с большим числом неизвестных привычная запись становится обременительной. Для более удобного представления выкладок применяются матрицы.

Определение. Матрица A размера $k \times n$, составленная из коэффициентов a_{ij}, называется *основной матрицей* системы (1); если к ней приписана правая часть b, то говорят о *расширенной матрице* системы (1):

основная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array}\right).$$

В этих обозначениях линейная система может быть переписана в компактном виде $Ax = b$, где x — вектор неизвестных, а b — правая часть.

⟳ Следующие записи эквивалентны:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b, \quad \text{где}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.\ \circlearrowleft$$

Решение системы линейных уравнений (1) может привести к одному из трех случаев:

- *несовместность* — система не имеет решений;
- *определенность* — система имеет ровно одно решение;
- *неопределенность* — система имеет более одного решения.

В качестве примеров каждого из этих типов могут служить следующие системы:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$ в) $x_1 + x_2 = 1.$

В первом случае мы, очевидно, не сможем подобрать числа, которые удовлетворяли бы обоим уравнениям; вторая система имеет единственное решение $c_1 = 0, c_2 = 1$; а третье уравнение имеет бесконечное число решений, поскольку для любого числа c набор $c_1 = c, c_2 = c + 1$ будет удовлетворять этому уравнению.

Свойство неопределенности уравнения или системы подразумевает существование двух или более решений. Неопределенные системы произвольного вида (полиномиальные, тригонометрические) могут обладать любым конечным или бесконечным числом решений, однако линейность позволяет сделать следующее уточнение.

Теорема 2.1. *Любая неопределенная система линейных уравнений имеет бесконечно много решений.*

□ Рассмотрим неопределенную систему $Ax = b$, которая приводит к двум различным решениям x и y. Выберем произвольное число c и определим вектор v_c по формуле $v_c = x + c \cdot (x - y)$. Покажем, что построенный вектор также является решением:

$$Av_c = A\Big(x + c \cdot (x - y)\Big) = Ax + A \cdot c \cdot (x - y) =$$

$$= Ax + c \cdot A \cdot (x - y) = b + c \cdot (b - b) = b.$$

Таким образом, вектор v_c для любого числа c образует решение системы $Ax = b$. Для завершения доказательства достаточно проверить, что векторы v_{c_1} и v_{c_2}, соответствующие разным числам c_1 и c_2, также различны. Допустим противное и предположим существование чисел $c_1 \neq c_2$, таких что $v_{c_1} = v_{c_2}$. В таком случае имеем:

$$v_{c_1} = v_{c_2} \;\Leftrightarrow\; x + c_1 \cdot (x - y) = x + c_2 \cdot (x - y) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (c_1 - c_2) \cdot (x - y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

Последнее равенство противоречит предположению о том, что x и y — *различные* решения системы $Ax = b$. Следовательно, $v_{c_1} \neq v_{c_2}$ для любой пары $c_1 \neq c_2$, что говорит о наличии бесконечного числа решений. ■

2.2 Элементарные преобразования матриц

Одним из наиболее распространенных способов решения системы (1) является метод исключения переменных. Суть его заключается в том, чтобы за конечное число шагов перейти к эквивалентной системе, которая имеет максимально упрощенный вид. Сам метод состоит в последовательном изменении расширенной матрицы с помощью *элементарных преобразований* трех типов. Определим допустимые преобразования, а также введем для них специальные обозначения:

- $r^{(i)\leftrightarrow(j)}$ — перестановка строк с номерами i, j;
- $r^{c\cdot(i)}$ — умножение элементов строки с номером i на ненулевое число c;
- $r^{(i)+c\cdot(j)}$ — замена строки с номером i линейной комбинацией строк с номерами i, j; строка $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in})$ заменяется комбинацией $(a_{i1} + c \cdot a_{j1}, a_{i2} + c \cdot a_{j2}, a_{i3} + c \cdot a_{j3}, \ldots, a_{in} + c \cdot a_{jn})$.

Элементарные преобразования имеют тесную связь с матричным умножением, которая позволяет упростить многие доказательства. Для выражения этой связи нам потребуются следующие обозначения. Пусть A — матрица размера $n \times k$, r — некоторое элементарное преобразование, а R — матрица, полученная из единичной $E_{n\times n}$ с помощью преобразования r.

Теорема 2.2. *Элементарное преобразование r приводит матрицу A к матрице $R \cdot A$. Первый сомножитель, не зависимо от типа преобразования r, является обратимой матрицей, причем*

- $\left(R^{(i)\leftrightarrow(j)}\right)^{-1} = \left(R^{(i)\leftrightarrow(j)}\right)$;
- $\left(R^{c\cdot(i)}\right)^{-1} = \left(R^{c^{-1}\cdot(i)}\right)$;
- $\left(R^{(i)+c\cdot(j)}\right)^{-1} = \left(R^{(i)-c\cdot(j)}\right)$.

$\circlearrowleft$ Совершим преобразование $r^{(1)+2\cdot(3)}$ над квадратной матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 14 \\ 3 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}. \ \circlearrowright$$

Теорема 2.2 приводится без доказательства, мы рассмотрим более подробно ее следствия.

Теорема 2.3. *Элементарное преобразование расширенной матрицы линейной системы является эквивалентным переходом.*

$\square$ Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$ и некоторое элементарное преобразование r, соответствующее матрице R.

Элементарное преобразование r приводит расширенную матрицу $\Big(A|\ b\Big)$ к матрице $\Big(RA|\ Rb\Big)$, что выражается в виде перехода

$$A \cdot x = b \ \Rightarrow \ R \cdot A \cdot x = R \cdot b.$$

Так как матрица R обратима, последние равенства эквивалентны:

$$RAx = Rb \ \Rightarrow \ R^{-1}RAx = R^{-1}Rb \ \Rightarrow \ EAx = Eb \ \Rightarrow \ Ax = b. \ \blacksquare$$

Элементарные преобразования позволяют не только упрощать системы линейных уравнений, но и находить обратные матрицы.

Теорема 2.4. *Элементарные преобразования $r_1, r_2, \ldots, r_k$ приводят квадратную матрицу $A_{n\times n}$ к единичной $E_{n\times n}$тогда и только тогда, когда эти же преобразования приводят единичную матрицу E к матрице A^{-1}.*

$\square$ Введем обозначения $R_1, R_2, \ldots, R_k$ для матриц элементарных преобразований $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Согласно условию теоремы,

$$R_k \cdot R_{k-1} \cdot \ldots \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot A = E.$$

Домножим слева данное равенство последовательно на $R_k^{-1}, \ldots, R_1^{-1}$

$$R_k \cdot R_{k-1} \cdot \ldots \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot A = E \ \Leftrightarrow \ R_{k-1} \cdot \ldots \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot A = R_k^{-1} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ R_{k-2} \cdot \ldots \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot A = R_{k-1}^{-1} \cdot R_k^{-1} \ \Leftrightarrow \ \ldots \ \Leftrightarrow \ A = R_1^{-1} \cdot \ldots \cdot R_k^{-1}$$

и используем задачу 14:

$$A = R_1^{-1} \cdot \ldots \cdot R_k^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \Big(R_1^{-1} \cdot \ldots \cdot R_k^{-1}\Big)^{-1} =$$

$$= R_k \cdot \ldots \cdot R_1 \ \Leftrightarrow \ R_k \cdot \ldots \cdot R_1 \cdot E = A^{-1}.$$

Последнее равенство означает, что последовательность преобразований $r_1, r_2, \ldots, r_k$ приводит единичную матрицу E к A^{-1}. $\blacksquare$

Данная теорема позволяет определить следующий алгоритм нахождения обратной матрицы (при условии ее существования). Рассмотрим матрицу $A_{n\times n}$ и приписав к ней $E_{n\times n}$, перейдем к матрице $\Big(A \mid E\Big)$. Совершая элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, приведем исходную матрицу к единичной. Тогда согласно доказанной теореме, правая часть преобразуется в искомую обратную матрицу: $\Big(A \mid E\Big) \to \Big(E \mid A^{-1}\Big)$.

$\circlearrowleft$ Найдем обратную к матрице $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Для этого припишем к матрице A единичную и совершим следующие элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2\cdot(1)}$$

$$\xrightarrow{(2)-2\cdot(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Из теоремы 2.4 следует, что $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. $\circlearrowleft$

2.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Если переставить цифры двузначного числа и поделить преобразованное число на первоначальное, то в частном получится 2, а в остатке — 7. Если приписать к этому числу справа цифру 3 и поделить преобразованное число на сумму цифр первоначального, то в частном получится 34, а в остатке — 9. Найти первоначальное число.

Решение. Запишем искомое число в виде $\overline{ab}$ и используем условие:

$$\begin{cases} \overline{ba} = 2 \cdot \overline{ab} + 7 \\ \overline{ab3} = 34 \cdot (a+b) + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10b + a = 2(10a + b) + 7 \\ 100a + 10b + 3 = 34(a+b) + 9 \end{cases}.$$

Приведем систему к стандартному виду

$$\begin{cases} 10b + a = 2(10a + b) + 7 \\ 100a + 10b + 3 = 34(a+b) + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b - 19a = 7 \\ 11a - 4b = 1 \end{cases}$$

и решим ее методом подстановки:

$$\begin{cases} 8b - 19a = 7 \\ 11a - 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (11a - 1) - 19a = 7 \\ 4b = 11a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}.$$

Ответ: 38.

Пример 2. Даны два раствора серной кислоты: первый — 40%-й, второй — 60%-й. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-й раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 40%-го и 60%-го раствора?

Решение. Обозначим искомые массы растворов буквами x и y и выразим через них концентрации растворов, полученных при смешении:

$$\frac{0,4x + 0,6y}{x + y + 5} = 0,2; \qquad \frac{0,4x + 0,6y + 0,8 \cdot 5}{x + y + 5} = 0,7.$$

Домножим полученные равенства на знаменатель и объединим результаты в одну систему:

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y = 0,2 \cdot (x + y + 5) \\ 0,4x + 0,6y + 4 = 0,7 \cdot (x + y + 5) \end{cases}.$$

Теперь раскроем скобки и приведем подобные:

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y = 0,2x + 0,2y + 1 \\ 0,4x + 0,6y + 4 = 0,7x + 0,7y + 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x + 0,4y = 1 \\ 0,3x + 0,1y = 0,5 \end{cases}.$$

Выразим переменную y из второго уравнения и исключим ее из первого методом подстановки:

$$y = \frac{0,5 - 0,3x}{0,1} = 5 - 3x \quad \Rightarrow \quad 0,2x + 0,4(5 - 3x) = 1.$$

И, наконец, последовательно определим значения x и y:

$$0,2x + 0,4(5 - 3x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 5 - 3x = 2.$$

Ответ: 1 кг 40%-го раствора и 2 кг 60%-го раствора.

Пример 3. Найти уравнение параболы, проходящей через точки $P(1,3)$, $Q(2,1)$ и $R(3,1)$.

Решение. Выпишем общее уравнение параболы

$$y = ax^2 + bx + c$$

и подставим в него координаты данных точек

$$P:\ 3 = a + b + c, \quad Q:\ 1 = 4a + 2b + c, \quad R:\ 1 = 9a + 3b + c.$$

Объединим три равенства в одну систему и найдем ее решение методом подстановки:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 - b - c \\ 4(3 - b - c) + 2b + c = 1 \\ 9(3 - b - c) + 3b + c = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 - b - c \\ 2b + 3c = 11 \\ 6b + 8c = 26 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 - b - c \\ 2b = 11 - 3c \\ 3(11 - 3c) + 8c = 26 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 7 \end{array} \right. .$$

Ответ: $y = x^2 - 5x + 7$.

Пример 4. Кристалл, находясь на стадии формирования, равномерно наращивает свою массу. Наблюдая за развитием двух кристаллов, заметили, что первый из них за 3 месяца дал такой же прирост массы, как второй за 7 месяцев. Однако по истечении года оказалось, что первый кристалл увеличил свою первоначальную массу на 4%, а второй — на 5%. Найти отношение первоначальных масс этих кристаллов.

Решение. Равномерное наращивание массы кристалла означает, что ее зависимость от времени является линейной. Обозначим символами x_0 и x_t первоначальную массу первого кристалла и ее значение в месяце t, а символами y_0 и y_t — те же величины для второго кристалла. Линейный закон изменения масс означает, что существуют некоторые числа a и b, для которых справедливы равенства

$$x_t = x_0 + at, \quad y_t = y_0 + bt.$$

Запишем условия задачи с помощью системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_3 - x_0 = y_7 - y_0 \\ x_{12} = x_0 + 0,04x_0 \\ y_{12} = x_0 + 0,05y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 + 3a) - x_0 = (y_0 + 7b) - y_0 \\ x_0 + 12a = 1,04x_0 \\ y_0 + 12b = 1,05y_0 \end{cases}.$$

Полученная система содержит три уравнения и четыре переменные, поэтому является неопределенной. Находить ее общее решение не требуется, поэтому мы поступим следующим образом. Выразим коэффициенты a и b из последних двух уравнений и подставим эти представления в первое равенство:

$$\begin{cases} a = \frac{0,04}{12} \cdot x_0 \\ b = \frac{0,05}{12} \cdot y_0 \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot \frac{0,04}{12} \cdot x_0 = 7 \cdot \frac{0,05}{12} \cdot y_0 \Rightarrow \frac{x_0}{y_0} = \frac{7 \cdot 0,05}{3 \cdot 0,04} = \frac{35}{12}.$$

Ответ: 35 : 12.

Пример 5. Стороны треугольника ABC лежат на прямых, заданных уравнениями $4x - 3y = 1$, $x + 15y = 16$ и $5x + 12y = 80$. Выяснить, будет ли треугольник остроугольным.

Решение. Вершина треугольника ABC является пересечением прямых, содержащих его стороны. Поэтому координаты вершин можно найти при помощи следующих систем линейных уравнений:

$$A:\ \begin{cases} 4x-3y=1 \\ x+15y=16 \end{cases} \quad B:\ \begin{cases} 4x-3y=1 \\ 5x+12y=80 \end{cases} \quad C:\ \begin{cases} 5x+12y=80 \\ x+15y=16 \end{cases}.$$

Решим каждую из них по отдельности. Для преобразования первой используем метод подстановки:

$$A:\ \begin{cases} 4x-3y=1 \\ x+15y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(16-15y)-3y=1 \\ x=16-15y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Во следующей системе предварительно вычтем из второго уравнения первое и выразим переменную x:

$$B:\ \begin{cases} 4x-3y=1 \\ x+15y=79 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(79-15y)-3y=1 \\ x=79-15y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}.$$

В третьей снова применим метод подстановки:

$$C:\ \begin{cases} 5x+12y=80 \\ x+15y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(16-15y)+12y=80 \\ x=16-15y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=0 \end{cases}.$$

Вычислим все стороны треугольника:

$$AB=\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2}=5, \quad BC=13, \quad AC=\sqrt{226}.$$

Поскольку в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, для определения его вида достаточно найти $\angle ABC$. Вычислим его с помощью теоремы косинусов:

$$\angle ABC=\arccos\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\arccos\left(-\frac{32}{130}\right).$$

Из последнего равенства видно, что угол $\angle ABC$ является тупым.

Ответ: треугольник ABC является тупоугольным.

Пример 6. Треугольник ABC расположен на плоскости так, что координаты всех его вершин являются рациональными числами. Доказать, что координаты центра описанной около треугольника ABC окружности так же будут рациональными.

Решение. Обозначим буквами l и m серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам AB и BC. Центр описанной окружности лежит на пересечении прямых l и m, а его координаты могут быть найдены при решении соответствующей системы линейных уравнений. Покажем, что каждую из прямых l и m можно описать с помощью уравнения $px + qy + r = 0$, в котором коэффициенты p, q и r являются рациональными. Прямая l представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка AB. Следовательно, ее уравнение можно вывести из условия

$$(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2,$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных приобретает стандартный вид:

$$2(x_b - x_a)x + 2(y_b - y_a)y + (x_a^2 + y_a^2 - x_b^2 - y_b^2) = 0.$$

По условию задачи, координаты x_a, y_a, x_b, y_b являются рациональными числами, поэтому все коэффициенты полученного уравнения также принадлежат множеству $\mathbb{Q}$. Те же самые рассуждения справедливы и для прямой m. Таким образом, центр описанной окружности O может быть найден при помощи системы

$$O: \quad \begin{cases} p_1 x + q_1 y + r_1 = 0, \\ p_2 x + q_2 y + r_2 = 0, \end{cases} \qquad p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}.$$

Решив последнюю систему, находим координаты x_o и y_o:

$$x_o = \frac{r_2 q_1 - r_1 q_2}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, \quad y_o = \frac{r_1 p_2 - r_2 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1}.$$

Из последних равенств видно: искомые координаты также являются рациональными, что и требовалось доказать.

Пример 7. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Процедура приведения данной матрицы к единичной с помощью элементарных преобразований устроена следующим образом. Сначала обнуляются числа, расположенные под главной диагональю, затем — над ней, а в завершение, если в этом есть необходимость, диагональные элементы преобразуются в единицы. Для удобства вычисления переставим первую и третью строки и обнулим поддиагональные элементы первого столбца:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3)-2\cdot(1)]{(2)-3\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Затем, опять же для удобства, сделаем дополнительное преобразование и обнулим поддиагональный элемент второго столбца:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)+4\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Теперь, последовательно используя вторую и третью строки, приведем матрицу к единичной:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)-3\cdot(3)]{(2)-(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 21 & -12 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)-5\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы

16. Второй член арифметической прогрессии равен 2, а сумма пятого и шестого членов равна 18. Найти сумму первых двадцати членов прогрессии.

17. Даны три сплава. Первый содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

18. Три сенокосилки вместе скашивают поле за 5 ч, первая и вторая — за 10 ч, а вторая и третья — за 8 ч. За какое время скашивает поле каждая из них в отдельности?

19. Самолет летел со скоростью 200 км/ч. Когда ему осталось лететь на 385 км. меньше, чем он пролетел, скорость увеличилась до 330 км/ч. Средняя скорость на всем пути составила 250 км/ч. Определить длину пути самолета.

20. Привести пример несовместной системы трех линейных уравнений относительно четырех переменных с ненулевыми коэффициентами, в которой любые два уравнения совместимы.

21. Какая система линейных уравнений с двумя неизвестными задает на плоскости три прямые, образующие треугольник?

22. Решить графически следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ -3x+y=7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-9y=6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 15x-6y=5 \end{cases}$.

23. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $A(5,6)$, $B(-2,-1)$ и $C(2,-3)$.

24. Привести пример двух пар плоскостей в пространстве, которые пересекаются по одной и той же прямой.

25. Выписать уравнения всех парабол $y(x)=ax^2+bx+c$, которые проходят через точки $A(1,-1)$ и $B(2,-3)$.

26. Найти многочлен третьей степени $P(x)$, для которого верны соотношения:
$P(-2)=-19,\ P(-1)=-2,\ P(1)=2,\ P(2)=13.$

27. Могут ли эквивалентные системы содержать разное число уравнений? При положительном ответе привести соответствующий пример.

28. Найти многочлен третьей степени $P(x)$, для которого выполняются условия:
$P(1)=1,\ P'(1)=0,\ P''(1)=2,\ P'''(1)=6.$

29. Найти обратные матрицы

а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

30. Привести пример системы линейных уравнений $A_{3\times 3}x=b$ и матрицы $R_{3\times 3}$, для которых системы $Ax=b$ и $RAx=Rb$ неэквивалентны.

3 Метод Гаусса

При решении систем линейных уравнений метод исключения переменных находит наиболее сжатое выражение в терминах расширенной матрицы. Поиск зависимости между переменными и подстановка их в уравнения принимают вид элементарных преобразований, а критерии совместности и определенности формулируются на матричном уровне. При этом выбор последовательности необходимых преобразований может быть четко формализован и описан в виде алгоритма.

Представленный ниже алгоритм назван в честь знаменитого немецкого ученого Гаусса, которого по праву считают одним из величайших математиков всех времен. Хорошо известна история открытия характеристического свойства арифметической прогрессии, сделанного им в девятилетнем возрасте! Феноменальный диапазон научных интересов Гаусса и его нестандартные подходы к решению математических проблем действительно поражают воображение.

Суть алгоритма заключается в предельном упрощении линейной системы, приводящем к мгновенному решению фактически в одно действие. На завершающем этапе расширенная матрица принимает специальный вид, в котором можно опознать подобие лестницы.

Определение. Матрица имеет *ступенчатый вид*, если первый ненулевой элемент каждой последующей строки находится строго правее первого ненулевого элемента предыдущей строки (при этом матрица может содержать одну или несколько нулевых строк).

Ступенчатый вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Неступенчатый вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Если расширенная матрица приведена к ступенчатому виду, то

решение соответствующей системы находится очень быстро. Двигаясь от последнего уравнения к первому, можно последовательно определить значения всех переменных.

↻ Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 3y - z = -4 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Третье уравнение определяет значение переменной $z = 1$. Подставив это значение во второе уравнение, находим $3y = -4 + z \Leftrightarrow y = -1$. Переменная x вычисляется с помощью первого равенства: $x = -3y - 2z = 1$. ↺

3.1 Приведение матрицы к ступенчатому виду

С помощью элементарных преобразований трех типов, описанных ранее, расширенную матрицу любой системы линейных уравнений можно привести к ступенчатому виду. Доказательство данного утверждения является конструктивным и по сути представляет собой описание алгоритма.

Теорема 3.1. *Элементарные преобразования строк позволяют привести любую матрицу $A_{n\times k}$ к ступенчатому виду.*

□ Доказательство проведем методом математической индукции по числу строк матрицы. *База индукции* $n = 1$ не нуждается в проверке, так как в этом случае матрица содержит единственную строку и имеет ступенчатый вид.

Индуктивный переход. Предположим, что с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду любую матрицу, содержащую не более $N - 1$ строк, и покажем справедливость аналогичного утверждения для матриц, состоящих из N строк.

Если исходная матрица — нулевая, она имеет ступенчатый вид, и утверждение не требует доказательства. В противном случае выберем первый ненулевой столбец матрицы с номером j. Пусть первый ненулевой элемент этого столбца расположен в строке с номером i. Тогда последовательность преобразований

$$R_1 = \left\{ R^{(i+1)-\frac{a_{(i+1),j}}{a_{ij}}\cdot(i)},\ \ldots,\ R^{(N)-\frac{a_{Nj}}{a_{ij}}\cdot(i)}, R^{(1)\leftrightarrow(i)} \right\}$$

приводит выбранный столбец матрицы к виду $(a_{ij}, 0, 0, \ldots, 0)^T$:

$$A \xrightarrow{R_1} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{ij} & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем 1-ю строку матрицы и с помощью некоторой последовательности элементарных преобразований R_2 приведем к ступенчатому виду матрицу, состоящую из строк с номерами $2, 3, \ldots, N$ (мы можем применить к этой матрице предположение индукции, так как она состоит из $N-1$ строки). При этом первые j столбцов не изменятся и останутся нулевыми:

$$\xrightarrow{R_2} \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \ldots & 0 & a_{ij} & * & & \ldots & * \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & & \multicolumn{3}{c}{\text{матрица}} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & \multicolumn{3}{c}{\text{ступенчатого}} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & \multicolumn{3}{c}{\text{вида}} & \end{array}\right).$$

Матрица, состоящая из N строк (полученная из исходной путем элементарных преобразований R_1 & R_2), будет также иметь ступенчатый вид. ■

$\circlearrowleft$ Рассмотрим пример приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-(1),(4)-(1)]{(2)-2\cdot(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}\cdot(2)}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}\cdot(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)+(2)]{(3)+2\cdot(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)\leftrightarrow(4)}$$

$$\xrightarrow{(3)\leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{4-2\cdot(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad \circlearrowright$$

Приведем следствие доказанной теоремы, связанное со свойством обратимости.

Теорема 3.2. *Квадратная матрица $A_{n\times n}$ обратима тогда и только тогда, когда после приведения к ступенчатому виду в ней не образуется нулевых строк.*

$\square$ Приведем матрицу A к ступенчатому виду и обозначим результат через A'. Согласно теореме 2.2, результат элементарных преобразований A' можно представить в виде произведения $T \cdot A$. В силу обратимости T, условия существования A^{-1} и $\left(A'\right)^{-1}$ эквивалентны.

Необходимость утверждения докажем от обратного. Допустим, что A' содержит хотя бы одну нулевую строку, скажем, с номером i. Тогда для любой квадратной матрицы $B_{n\times n}$ произведение $A' \cdot B$ также будет содержать нулевую строку (с тем же номером i). Таким образом, равенство $A' \cdot B = E$ не будет выполняться ни для какой матрицы B, что означает необратимость A' и, соответственно, необратимость A.

Достаточность. Если квадратная матрица A' имеет ступенчатый вид и не содержит нулевых строк, то первый ненулевой элемент каждой последующей строки смещен ровно на одну позицию вправо относительно первого ненулевого элемента предыдущей строки. Другими словами, на главной диагонали матрицы A' расположены ненулевые числа, а под ней — только нулевые элементы. В этом случае, с помощью дополнительной цепочки элементарных преобразований, мы можем обнулить элементы, расположенные над главной диагональю и перейти к эквивалентной диагональной матрице A''. Поделив строки матрицы A'' на соответствующие диагональные элементы, мы приведем исходную матрицу к единичной. Согласно теореме 2.4 матрица A является обратимой. ■

3.2 Критерии совместности и определенности

Ступенчатый вид расширенной матрицы позволяет установить тип линейной системы — несовместная, определенная или неопределенная — и в случае совместности выписать решение. Разберем последовательно все случаи, сделав предварительно следующее замечание. Нулевые строки расширенной матрицы соответствуют уравнениям $0 = 0$, которые справедливы для любых значений переменных. Поскольку такие уравнения могут не учитываться при решении системы, после приведения к ступенчатому виду нулевые строки расширенной матрицы можно отбросить. В дальнейшем мы не будем оговаривать это действие специально, считая, что оно выполняется автоматически. Другими словами, мы будем предполагать, что ступенчатый вид матрицы не содержит нулевых строк.

Лемма 3.3. *Если расширенная матрица ступенчатого вида и содержит строку типа* $(0\ 0\ \ldots\ 0 \mid c \neq 0)$*, то система несовместна.*

□ Строка $(0\ 0\ \ldots\ 0 \mid c \neq 0)$ соответствует уравнению, которое не может выполняться ни при каких значениях переменных. ■

Лемма 3.4. *Если расширенная матрица ступенчатого вида не содержит строк типа* $(0\ 0\ \ldots\ 0 \mid c \neq 0)$ *и имеет размер* $n \times (n+1)$ *(с учетом правой части и без учета нулевых строк), то исходная является определенной.*

□ По условию леммы, первый ненулевой элемент каждой последующей строки расширенной матрицы смещен ровно на одну позицию вправо относительно первого ненулевого элемента предыдущей строки. Другими словами, строка с номером i соотносится с уравнением, содержащим переменные $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$, причем коэффициент при x_i отличен от нуля. Это означает, что, двигаясь от последнего уравнения к первому, мы последовательно определим значения всех переменных, начиная с x_n и заканчивая x_1. При этом полученное решение будет единственным. ■

Для формулировки критерия неопределенности системы нам потребуется следующая терминология. Переменные, соответствующие первым ненулевым элементам расширенной матрицы системы, имеющей ступенчатый вид, называются *базисными*, остальные переменные при этом называются — *свободными*.

Лемма 3.5. *Если система линейных уравнений содержит свободные переменные, то она является неопределенной.*

□ Рассмотрим линейную систему, обладающую свободными переменными, и ее расширенную матрицу ступенчатого вида размера $n \times k$, где $k > n+1$. Перенесем свободные переменные в правую часть и придадим им произвольные значения. Полученная система линейных уравнений (относительно базисных переменных) будет соответствовать расширенной матрице ступенчатого вида размера $n \times (n+1)$. Согласно лемме 3.4, она позволяет определить базисные переменные единственным образом. Следовательно, выбирая произвольные числа в качестве свободных переменных и однозначно восстанавливая значения базисных, можно построить множество

решений исходной системы, которое окажется бесконечным. ■

Объединим леммы 3.3, 3.4, 3.5 в одно утверждение.

Теорема 3.6. *Система линейных уравнений является:*

- *несовместной, если расширенная матрица системы, приведенная к ступенчатому виду, содержит хотя бы одну строку вида* $(0\ 0\ \ldots\ 0 \mid c \neq 0)$*;*
- *определенной, если она совместна и не содержит свободных переменных;*
- *неопределенной, если она совместна и содержит хотя бы одну свободную переменную.*

↻ Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 5\ . \end{cases}$$

Для этого запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)-2\cdot(1)]{(3)+(1),(4)-(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3)-(2)]{(2)\leftrightarrow(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выделим свободные переменные x_3 и x_4 и последовательно найдем значения базисных:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + 2 = -x_3 - 3x_4 + 8 \\ x_2 = x_3 + x_4 - 3 \end{array}\right. .$$

Подставив вместо свободных переменных произвольные числа c_1, c_2, получаем решение системы в общем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad \circlearrowleft$$

3.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Привести к ступенчатому виду данную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -10 & 3 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & -7 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для упрощения вычислений переставим строки с номерами (1) и (3) так, чтобы в правом верхнем углу матрицы оказалась единица:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -10 & 3 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & -7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 1 & 4 \\ 4 & 9 & -10 & 3 & 11 \\ 3 & 7 & -7 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Затем преобразуем первый столбец, используя первую строку матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 1 & 4 \\ 4 & 9 & -10 & 3 & 11 \\ 3 & 7 & -7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-3\cdot(1)]{(2)-2\cdot(1),\ (3)-4\cdot(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -10 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Первая строка в дальнейших преобразованиях задействована уже не будет. Обратимся ко второй строке и преобразуем с ее помощью второй столбец:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -10 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-2\cdot(2)]{(3)-3\cdot(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В завершение поменяем местами третью и четвертую строки и совершим вычитание:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-2\cdot(3)]{(3)\leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

Ответ: $A \to B$.

Пример 2. Выяснить, является ли данная матрица обратимой:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду и выясним, образуется ли при этом нулевая строка: если не образуется, то ответ

будет положительным, в противном случае — отрицательным. Для удобства вычислений поменяем местами первые две строки матрицы и преобразуем первый столбец:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 12 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)-3\cdot(1)]{(2)-2\cdot(1),\ (3)-3\cdot(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & -5 & 2 & 22 \\ 0 & -7 & 9 & 33 \end{pmatrix}.$$

Так как во втором столбце полученной матрицы не содержится ни одной единицы, то непродуманные преобразования второго столбца приведут к дробям. Чтобы этого избежать совершим две дополнительные операции:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & -5 & 2 & 22 \\ 0 & -7 & 9 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 9 & 33 \\ 0 & -5 & 2 & 22 \\ 0 & -3 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)-2\cdot(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 19 & 11 \\ 0 & -5 & 2 & 22 \\ 0 & -3 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно работать со вторым столбцом, оперируя исключительно целыми числами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 19 & 11 \\ 0 & -5 & 2 & 22 \\ 0 & -3 & -5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-3\cdot(2)]{(3)-5\cdot(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 19 & 11 \\ 0 & 0 & -93 & -33 \\ 0 & 0 & -62 & -22 \end{pmatrix}.$$

Заключительное преобразование выявляет нулевую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 19 & 11 \\ 0 & 0 & -93 & -33 \\ 0 & 0 & -62 & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)-\frac{2}{3}\cdot(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 19 & 11 \\ 0 & 0 & -93 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: матрица A является необратимой.

Пример 3. Найти цепочку элементарных преобразований, которая приводит матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ к матрице $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Покажем, что каждую из данных матриц можно привести к единичной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1]{(2)-3\cdot(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2]{(1)+2\cdot(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3]{-1\cdot(2)} E,$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[T_1]{(1)-2\cdot(2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[T_2]{(2)+4\cdot(1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[T_3]{-1\cdot(1)} E.$$

Таким образом, переход $A \to B$ можно осуществить с помощью элементарных преобразований $R_1, R_2, R_3, T_3^{-1}, T_2^{-1}, T_1^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1]{(2)-3\cdot(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2]{(1)+2\cdot(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3]{-1\cdot(2)} E$$

$$\xrightarrow[(T_3)^{-1}]{-1\cdot(1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(T_2)^{-1}]{(2)-4\cdot(1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(T_1)^{-1}]{(1)+2\cdot(2)} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Ответ: $\{(2)-3\cdot(1), (1)+2\cdot(2), -1\cdot(2), -1\cdot(1), (2)-4\cdot(1), (1)+2\cdot(2)\}$.

Пример 4. Определить тип данной системы линейных уравнений

(несовместная, определенная, неопределенная):

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2\ . \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу коэффициентов данной системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(3)+2\cdot(1) \\ (4)+3\cdot(1)}]{\substack{(1)\leftrightarrow(2) \\ (2)-3\cdot(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 4 & -9 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -14 & 6 & 13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(4)-(2)]{(3)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -19 & 8 & 19 \\ 0 & 0 & -19 & 8 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Последняя строка полученной основной матрицы соответствует уравнению $0 = 1$, которое не имеет решений, поэтому исходная система является несовместной.

Ответ: Данная система уравнений является несовместной.

Пример 5. Найти условие, при котором три попарно непараллельные прямые

$$l_1:\ y = k_1x + b_1, \quad l_2:\ y = k_2x + b_2, \quad l_3:\ y = k_3x + b_3$$

пересекаются в одной точке.

Решение. Объединим уравнения прямых l_1, l_2 и l_3 в одну систему и запишем ее расширенную матрицу коэффициентов, считая для

удобства y первой переменной, а x — второй:

$$\left\{\begin{array}{l} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \\ y = k_3x + b_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y - k_1x = b_1 \\ y - k_2x = b_2 \\ y - k_3x = b_3 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -k_1 & b_1 \\ 1 & -k_2 & b_2 \\ 1 & -k_3 & b_3 \end{array}\right).$$

Тогда пересечение прямых l_1, l_2 и l_3 в одной точке равносильно определенности полученной системы. Совершим первый шаг алгоритма приведения матрицы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -k_1 & b_1 \\ 1 & -k_2 & b_2 \\ 1 & -k_3 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -k_1 & b_1 \\ 0 & k_1 - k_2 & b_2 - b_1 \\ 0 & k_1 - k_3 & b_3 - b_1 \end{array}\right).$$

Так как прямые попарно непараллельны, то коэффициенты второго столбца $k_1 - k_2$ и $k_1 - k_3$ отличны от нуля. Следовательно, система будет иметь единственное решение лишь в том случае, если вторая и третья строка окажутся пропорциональными:

$$\frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_2} = \frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_1} = a, \quad \text{где } a \text{ — это некоторое число.}$$

Распишем полученное условие подробно:

$$\frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_2} = \frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_1} = a \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} k_1 - k_3 = a \cdot (k_1 - k_2) \\ b_3 - b_1 = a \cdot (b_2 - b_1) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} k_3 = (1 - a) \cdot k_1 + a \cdot k_2 \\ b_3 = (1 - a) \cdot b_1 + a \cdot b_2 \end{array}\right.$$

Таким образом, прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда уравнение третьей прямой l_3 представляет собой указанную комбинацию уравнений l_1 и l_2 с некоторым параметром a:

$$y = k_3x + b_3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \Big((1 - a) \cdot k_1 + a \cdot k_2\Big)x + (1 - a) \cdot b_1 + a \cdot b_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (1 - a) \cdot (k_1x + b_1) + a \cdot (k_2x + b_2).$$

Ответ: Уравнение третьей прямой l_3 представляет собой комбинацию уравнений l_1 и l_2.

Пример 6. Найти общее решение данной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 13x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_1 + 10x_2 - 14x_3 + 22x_4 = 10 \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу коэффициентов данной системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -8 & 13 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 3 \\ 5 & 10 & -14 & 22 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-3\cdot(1),\ (4)-5\cdot(1)]{(1)\leftrightarrow(3),\ (2)-2\cdot(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(4)-(2)]{(3)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В полученной системе уравнений базисными являются переменные x_1, x_3 и x_4, а свободной переменной выступает x_2. Запишем систему в явном виде и найдем базисные переменные:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 13x_4 = 6 \\ x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 8 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -2\ . \end{cases}$$

Следовательно, общее решение данной системы выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 + 8 \\ x_2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(8,0,-1,-2)+c\cdot(-2,1,0,0),\quad c\in\mathbb{R}$.

Пример 7. Исследовать данную систему линейных уравнений (a — числовой параметр)

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+(1+a)x_2+x_3+x_4=3\\ x_1+x_2+(1+a)x_3+x_4=4\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$$

на совместность и определенность. В ответе указать общее решение.

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и упростим ее с помощью последней строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+a & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(4))]{(1)-(4),\ (2)-(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} a-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & a & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

1) Если $a=1$, то первая строка матрицы становится нулевой, поэтому ее можно отбросить и привести оставшуюся матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & a & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{a=1} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(1)\leftrightarrow(2)]{(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя переменная оказывается свободной, а общее решение

системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Если $a = 0$, то второе и третье уравнение системы становятся несовместными, поэтому при таком значении параметра система не имеет решений.

3) В общем случае, при $a \neq 0$ и $a \neq 1$, мы можем выполнить дальнейшие преобразования расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(4)-(2)/a \\ (4)-(3)/a}]{(4)-\frac{1}{a-1}\cdot(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\frac{5}{a} \end{array}\right).$$

Полученная система не имеет свободных переменных, поэтому она является определенной:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{a},\ x_3 = \frac{3}{a},\ x_4 = 1 - \frac{5}{a}.$$

Ответ: При $a = 0$ система является несовместной;
при $a = 1$ система является неопределенной:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4, 2, 3, 0) + c \cdot (1, 0, 0, -1),\ c \in \mathbb{R};$$

при $a \neq 0$ и $a \neq 1$ система имеет единственное решение $\left(0, \frac{2}{a}, \frac{2}{a}, 1 - \frac{5}{a}\right)$.

Задачи для самостоятельной работы

Привести расширенную матрицу системы линейных уравнений к ступенчатому виду.

31.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

32.

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

33. Исследовать системы на совместность и определенность:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$.

34. Исследовать системы на совместность и определенность:

а) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$.

35. Найти общее решение следующих систем:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$.

36. Найти общее решение следующих систем:

а) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - x_3 = -2 \\ x_2 - x_4 = -2 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = -3 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = -4 \\ -x_3 + x_5 = 2 \\ -x_4 + x_6 = 2 \end{cases}$.

37. Найти общее решение следующих систем:

а) $\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25 \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40 \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65 \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28 \\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43 \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58 \\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69 \end{cases}$.

38. Доказать, что общее решение неоднородной системы уравнений представляется в виде суммы одного (произвольного) решения этой системы и общего решения однородной системы с такой же основной матрицей коэффициентов.

39. Доказать, что если расширенная матрица совместной системы, приведенная к ступенчатому виду (с вычеркнутыми нулевыми строками), имеет размер $(n-1)\times(n+1)$, то любые два решения этой системы пропорциональны.

40. Найти общее решение систем в зависимости от параметра λ:

а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5 \\ x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11 \\ 4x_1+x_2+4x_3+\lambda x_4=2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7 \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9 \\ \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11 \end{cases}$.

41. Найти общее решение систем в зависимости от параметра λ:

а) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} (\lambda+1)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+3\lambda \\ x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda^3+3\lambda^2 \\ x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^4+3\lambda^3 \end{cases}$.

42. Каким свойством должна обладать система линейных уравнений, чтобы сумма/разность любых двух ее решений также являлась ее решением?

43. Каким свойством должна обладать система линейных уравнений, чтобы любое ее решение, умноженное на произвольное число, также являлось ее решением?

44. При каком значении параметра λ вектор $v=(-2,0,2,\lambda)$ образует фундаментальный набор решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Указание. Набор решения для данной системы уравнений называется фундаментальным, если

а) ни один из элементов набора не выражается через остальные;

б) любое решение системы уравнений представляется в виде некоторой комбинации элементов этого набора.

45. Выяснить, образуют ли векторы

а) $\begin{cases} v_1 = (11, 33, -81, 10, -2) \\ v_2 = (1, -3, 3, 0, 0); \end{cases}$ б) $\begin{cases} v_1 = (11, 0, -24, 5, -1) \\ v_2 = (1, 3, 3, 0, 0); \end{cases}$

фундаментальный набор решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0 \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

4 Основные свойства определителей

Многие математические модели, обладающие практической значимостью и исследующие линейные зависимости между некоторыми величинами, выражаются в виде *квадратных* систем линейных уравнений, в которых число переменных совпадает с числом уравнений. Предположения моделей, как правило, значительно упрощают структуру матрицы коэффициентов, в силу чего общий метод Гаусса теряет свою эффективность и уступает место другим методикам, основанным на теории *определителей*.

Определитель, или детерминант, представляет собой числовую характеристику квадратной матрицы, играющую важную роль как в алгебре, так и в геометрии. В частности, по ней можно судить об обратимости матриц и разрешимости линейных систем, с ее помощью оперативно вычисляются площади плоских и объемы пространственных фигур.

Описание определителей может быть выстроено в одном из двух направлений: аксиоматическом или индукционном. Первый подход, по сути напоминающий геометрический, устанавливает минимальный набор аксиом, формируя тем самым базу для дальнейшего вывод всех необходимых свойств. Второй, конструктивный по своей природе, предполагает последовательное создание правил для вычисления детерминантов произвольных порядков (неявно основанных на тех же аксиомах). Оба метода представляются равноправными, обладающими своими недостатками и преимуществами, и потому заслуживающими внимания.

Определение. Числовая функция det, определенная на множестве квадратных матриц, называется *определителем (детерминантом)*, если она обладает тремя следующими свойствами.

- *Антисимметричность.* При перестановке двух строк определитель меняет знак:

$$det\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{(j)} \\ \vdots \\ \boxed{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} = -det\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{(i)} \\ \vdots \\ \boxed{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

- *Линейность определителя как функции строк.*

  1. При умножении строки на некоторое число определитель умножается на то же число:

$$det\begin{pmatrix} \boxed{(1)} \\ \vdots \\ \boxed{c\cdot(i)} \\ \vdots \\ \boxed{(n)} \end{pmatrix} = c\cdot det\begin{pmatrix} \boxed{(1)} \\ \vdots \\ \boxed{(i)} \\ \vdots \\ \boxed{(n)} \end{pmatrix}.$$

  2. Если некоторая строка матрицы представлена в виде суммы двух строк, то ее определитель равен сумме соответствующих определителей:

$$det\begin{pmatrix} \boxed{(1)} \\ \vdots \\ \boxed{(i_1)+(i_2)} \\ \vdots \\ \boxed{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} \boxed{(1)} \\ \vdots \\ \boxed{(i_1)} \\ \vdots \\ \boxed{(n)} \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} \boxed{(1)} \\ \vdots \\ \boxed{(i_2)} \\ \vdots \\ \boxed{(n)} \end{pmatrix}.$$

- *Нормированность.* $detE = 1$ — определитель единичной матрице равен 1.

Определитель матрицы A может обозначаться либо через $detA$, либо обрамлением матрицы с помощью вертикальных черт $|A|$. Рассмотрим несколько простейших свойств определителя, вытекающих из его определения.

Лемма 4.1. *Если матрица содержит нулевую строку, то ее определитель равен нулю.*

□ Пусть некоторая строка матрицы состоит только из нулей, тогда

$$\begin{vmatrix} \boxed{(1)} \\ \vdots \\ \boxed{0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0} \\ \vdots \\ \boxed{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{(1)} \\ \vdots \\ \boxed{0 \cdot 0 \ \dots \ 0 \cdot 0 \ \dots \ 0 \cdot 0} \\ \vdots \\ \boxed{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} \boxed{(1)} \\ \vdots \\ \boxed{0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0} \\ \vdots \\ \boxed{(n)} \end{vmatrix} = 0. \ \blacksquare$$

Лемма 4.2. *Если матрица содержит две одинаковых строки, то определитель равен нулю.*

□ Пусть строки матрицы A с номерами i, j совпадают. Вычислим определитель матрицы, которая получается из A перестановкой строк $(i) \leftrightarrow (j)$: с одной стороны мы получим ту же самую матрицу, поэтому определитель не изменится, с другой стороны, согласно свойству антисимметричности, он должен поменять знак. Таким образом, получаем следующее уравнение:

$$detA = -detA \quad \Leftrightarrow \quad detA = 0. \blacksquare$$

⟳ Проиллюстрируем приведенное выше определение и простейшие свойства, вычислив определитель матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Для этого представим первую строку матрицы в виде суммы двух и воспользуемся линейностью:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (\text{лемма } 4.2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим в сумму вторую строку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{лемма } 4.2) = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

И, наконец, сведем вычисление к единичной матрице:

$$-5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -5 \cdot \left(detE + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = -5 \cdot (1 + 3 \cdot 0) = -5. \ ⟲$$

4.1 Определитель и элементарные преобразования

Рассмотрим вопрос о том, как меняется определитель при элементарных преобразованиях матрицы. Первые два типа преобразований неявно присутствуют в определении. Действительно, из свойств линейности и антисимметричности следует, что

$$det\Big(R^{(i)\leftrightarrow(j)}\cdot A\Big) = -detA, \quad det\Big(R^{c\cdot(i)}\cdot A\Big) = c\cdot detA.$$

Третий тип преобразований охватывает лемма 4.2:

$$det\Big(R^{(i)+c\cdot(j)}\cdot A\Big) = det\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{(i)+c\cdot(j)} \\ \vdots \\ \boxed{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{(i)} \\ \vdots \\ \boxed{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{c\cdot(j)} \\ \vdots \\ \boxed{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} = detA + c\cdot 0 = detA.$$

Данные равенства позволяют вычислить определители матриц элементарных преобразований. Подставим в полученные формулы вместо A единичную матрицу:

$$det\Big(R^{(i)\leftrightarrow(j)}\Big) = -detE = -1, \quad det\Big(R^{c\cdot(i)}\Big) = c\cdot detE = c,$$

$$det\Big(R^{(i)+c\cdot(j)}\Big) = detE = 1. \tag{2}$$

Из проведенных рассуждений вытекает следующий важный результат.

Теорема 4.3. *Пусть R — матрица элементарного преобразования. Тогда для любой квадратной матрицы A имеет место равенство $det(R \cdot A) = detR \cdot detA$.*

Элементарные преобразования, несмотря на кажущуюся простоту, являются эффективным способом решения систем линейных уравнений и вычисления определителей. Мы доказали, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду. Если исходная матрица была квадратной, то в результате обязательно получится верхнетреугольная матрица, у которой все элементы, расположенные под главной диагональю, равны 0 (при этом и на самой диагонали могут оказаться нули). Определитель верхнетреугольной матрицы вычисляется совсем просто.

Лемма 4.4. *Если A — верхнетреугольная матрица, то ее определитель равен произведению диагональных элементов.*

□ Пусть A — верхнетреугольная матрица, на диагонали которой расположены числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Докажем, что $detA = \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$. Для этого рассмотрим два случая.

1. $\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$. В этом случае все диагональные элементы отличны от нуля и мы можем привести матрицу к диагональной, используя только преобразования третьего типа:

$$R_n = \left\{ R^{(n-1)-\frac{a_{n-1,n}}{\lambda_n}\cdot(n)}, \ldots, R^{(1)-\frac{a_{1n}}{\lambda_n}\cdot(n)} \right\}, \ldots, R_2 = \left\{ R^{(1)-\frac{a_{1,2}}{\lambda_2}\cdot(2)} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & * \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{n-1}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & 0 \\ 0 & \lambda_2 & * & * & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_{n-2}} \ \dots \ \xrightarrow{R_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Так как определитель не меняется при преобразованиях третьего типа, имеем:

$$detA = det\Big(Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\Big) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot detE = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

2. $\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$. В этом случае один из диагональных элементов обращается в нуль. Докажем, что определитель матрицы также равен 0. Пусть l — такой номер, при котором $\lambda_l = 0,\ \lambda_m \neq 0\ \forall\ m > l$. Если $l = n$, то последняя строка матрицы состоит из одних нулей и ее определитель, по лемме 4.1, равен 0. Если $l < n$, совершим серию преобразований $R_{n-1},\ \dots,\ R_{l+1}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{l-1} & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_{l+1} & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{l-1} & * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_{l+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Строка с номером l стала нулевой, поэтому определитель последней матрицы, а следовательно, и матрицы A равен 0. ■

↻ Вычислим следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[(2)-2\cdot(1)]{(3)+2\cdot(1)} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3)+\cdot(2)} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)\cdot(-1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (\text{лемма } 4.4) = 1 \cdot 7 \cdot 6 = 42. \ ↺$$

Элементарные преобразования позволяют также сформулировать критерий обратимости матриц в терминах определителей.

Лемма 4.5. *Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда $detA \neq 0$.*

□ Согласно теореме 3.2, матрица A будет обратимой тогда и только тогда, когда после приведения к ступенчатому виду она не будет содержать нулевых строк. Это равносильно тому, что в результате получится верхнетреугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали. По лемме 4.4 последнее эквивалентно условию $detA \neq 0$. ■

4.2 Определитель и матричные операции

Теорема 4.3 описывает изменения определителя в результате элементарных преобразований и устанавливает равенство $det(R \cdot$

$A) = detR \cdot detA$. Первый сомножитель здесь обязан быть матрицей элементарного преобразования. Докажем, что данная формула имеет место и в общем случае, для произвольной матрицы R.

Теорема 4.6. *Определитель произведения матриц равен произведению их определителей.*

□ Рассмотрим квадратные матрицы A и B размера $n \times n$ и докажем равенство $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$.

1. Пусть матрица A обратима. Тогда с помощью некоторой последовательности элементарных преобразований она приводится к единичной. Следовательно, обратная последовательность преобразований приведет единичную матрицу к исходной, что выразится формулой

$$R_k \cdot \ldots \cdot R_1 \cdot E = A \quad \Leftrightarrow \quad A = R_k \cdot \ldots \cdot R_1,$$

где каждая матрица R_j соответствует некоторому элементарному преобразованию. По теореме 4.3 заключаем:

$$det\Big(A \cdot B\Big) = det\Big(R_k \cdot R_{k-1} \cdot \ldots \cdot R_1 \cdot B\Big) = detR_k \cdot det\Big(R_{k-1} \cdot \ldots \cdot R_1 \cdot B\Big) =$$

$$\ldots = detR_k \cdot detR_{k-1} \cdot \ldots \cdot detR_1 \cdot detB = detR_k \cdot detR_{k-1} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot det\Big(R_2 \cdot R_1\Big) \cdot detB = \ldots = det\Big(R_k \cdot \ldots \cdot R_2 \cdot R_1\Big) \cdot detB = detA \cdot detB.$$

2. Предположим вырожденность матрицы A и покажем, что $det(A \cdot B) = 0$. По теореме 3.2 матрица A представляется в виде

$$R_k \cdot \ldots \cdot R_1 \cdot S,$$

где каждый множитель R_j — матрица элементарного преобразования, а S — матрица ступенчатого вида с нулевой строкой. Распишем определитель произведения матриц A и B, используя теорему 4.3:

$$det\Big(A \cdot B\Big) = det\Big(R_k \cdot \ldots \cdot R_1 \cdot S \cdot B\Big) = detR_k \cdot \ldots \cdot detR_1 \cdot det\Big(S \cdot B\Big).$$

Произведение $S \cdot B$ также будет содержать нулевую строку, поэтому его определитель равен нулю. Следовательно,

$$det(A \cdot B) = 0 = 0 \cdot detB = \det A \cdot detB. \blacksquare$$

До сих пор, в определении и описании свойств определителей (линейности, изменении в результате элементарных преобразований), использовались только строки матрицы. На самом деле, в случае с определителями, строки и столбцы матрицы равноправны.

Теорема 4.7. *Для любой квадратной матрицы A имеет место равенство $detA = detA^T$.*

□ Рассмотрим три возможных случая.

1. Докажем утверждение для матриц элементарных преобразований. Первый и второй тип преобразований соответствуют симметрическим матрицам, поэтому равенство $detA = detA^T$ не требует доказательства. Для матриц преобразований третьего типа необходимое равенство следует из следующей цепочки:

$$det\Big(R^{(i)+c\cdot(j)}\Big)^T = det\Big(R^{(j)+c\cdot(i)}\Big) = 1 = det\Big(R^{(i)+c\cdot(j)}\Big).$$

2. Пусть матрица A обратима и представлена в виде (см. доказательство теоремы 4.6)

$$A = R_k \cdot \ldots \cdot R_1,$$

где каждый сомножитель R_j — матрица элементарного преобразования. Тогда, согласно задаче 2,

$$detA^T = det\big(R_k \cdot \ldots \cdot R_1\big)^T = det\big(R_1^T \cdot \ldots \cdot R_k^T\big) = detR_1^T \cdot \ldots \cdot detR_k^T =$$
$$= detR_1 \cdot \ldots \cdot detR_k = detR_k \cdot \ldots \cdot detR_1 = \big(R_k \cdot \ldots \cdot R_1\big) = detA.$$

3. Пусть матрица A вырождена. Тогда, согласно задаче 2, матрица A^T, также будет вырожденной. По лемме 4.5 имеем: $detA = detA^T = 0$. $\blacksquare$

4.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, совершая элементарные преобразования над столбцами.

Решение. Приведем матрицу к треугольному виду (в скобках будут указаны номера столбцов). Для этого вынесем общий множитель из первого столбца и затем вычтем из него второй:

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Согласно лемме 4.4, опрелитель верхнетреугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, поэтому

$$\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 14.$$

Ответ: 14.

Пример 2. Вычислить определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Условимся заключать номер строки матрицы в круглые скобки, а номер столбца — в квадратные. Данная матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью следующей цепочки элементарных преобразований (как над строками, так и над

столбцами):

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[[2]-a\cdot[1]]{[3]-a\cdot[2]} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b(b-a) \\ 1 & c-a & c(c-a) \end{vmatrix} \xrightarrow{[3]-b\cdot[2]}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & 0 \\ 1 & c-a & (c-b)(c-a) \end{vmatrix} \xrightarrow[(1)\leftrightarrow(3)]{[1]\leftrightarrow[3]} \begin{vmatrix} (c-b)(c-a) & c-a & 1 \\ 0 & b-a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь осталось воспользоваться леммой 4.4:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (c-b)(c-a) & c-a & 1 \\ 0 & b-a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a).$$

Ответ: $(c-b)(c-a)(b-a)$.

Пример 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ произвольной матрицы размера 2×2.

Решение. Чтобы привести матрицу к верхнетреугольному виду, предположим сначала, что хотя бы одно из чисел, a или b, отлично от нуля. В первом случае мы сразу можем привести матрицу к нужному виду

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \big((2) - \tfrac{c}{a}\cdot(1)\big) = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{vmatrix} = a\cdot\frac{ad-bc}{a} = ad-bc,$$

а во втором — предварительно поменяв местами столбцы:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \big((2) - \tfrac{d}{b}\cdot(1)\big) = -\begin{vmatrix} b & a \\ 0 & \frac{bc-ad}{b} \end{vmatrix} = ad-bc.$$

В заключение заметим, что по лемме 4.1 формула

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

остается верной при $a = b = 0$.

Ответ: $ad - bc$.

Пример 4. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ подобрать ненулевые квадратные матрицы $B_{2\times 2}$ и $C_{2\times 2}$, удовлетворяющие условиям

$$det(A+B) = detA + detB \quad \text{и} \quad det(A+C) \neq detA + detC.$$

Решение. Рассмотрим произвольную матрицу $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и запишем условие для ее коэффициентов, при котором выполняется равенство $det(A+M) = detA + detM$:

$$det(A+M) = \begin{vmatrix} 1+a & 2+b \\ 3+c & 4+d \end{vmatrix} = detA + detM = -2 + ad - bc \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+a)(4+d) - (3+c)(2+b) = -2 + ad - bc \quad \Leftrightarrow \quad 4a + d = 3b + 2c.$$

Из этого условия видно, что матрицу B можно заполнить единицами:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 = det\ A.$$

Для решения второй задачи можно использовать матрицу $C = A$:

$$det(A+C) = det(2A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -8 \neq det\ A + det\ C = 2det\ A = -4.$$

Ответ: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример 5. Найти площадь параллелограмма, образованного парой плоских векторов $\vec{p}(a,b)$ и $\vec{q}(c,d)$ (см. рисунок ниже).

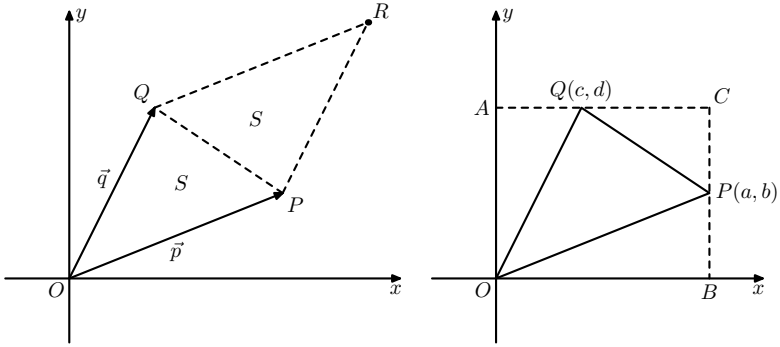


Рис. 1.

Решение. Рассмотрим на плоскости пару векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и обозначим их концы буквами P и Q соответственно. Построим параллелограмм $OPRQ$ и разобьем его на два равных треугольника OPQ и RPQ.

Нарисуем отдельно треугольник OPQ и вычислим его площадь. Для этого через точки P и Q проведем прямые, параллельные осям координат, и обозначим соответствующие точки пересечения буквами A, B и C. Тогда

$$S_{OPQ} = S_{OACB} - S_{OAQ} - S_{OPB} - S_{PQC} =$$

$$= ad - \tfrac{1}{2}cd - \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{2}(a-c)(d-b) = \tfrac{1}{2}(ad-bc).$$

Следовательно, площадь параллелограмма $OPRQ$, которая вдвое больше площади треугольника OPQ, совпадает с определителем матрицы, составленной из координат векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$S_{OQRP} = 2S_{OPQ} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Ответ: $ad - bc$.

Пример 6. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix},$$

в котором $x_1,\ x_2,\ x_3$ — корни уравнения $x^3+px+q=0$, равен нулю.

Решение. Прибавим к первой строке данной матрицы вторую и третью и воспользуемся свойством линейности определителя:

$$\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix},$$

где $s = x_1+x_2+x_3$. Если $x_1,\ x_2,\ x_3$ — корни уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, в котором $a \neq 0$, то, согласно теореме Виета,

$$x_1+x_2+x_3 = -\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2 + x_2\cdot x_3 + x_1\cdot x_3 = \frac{c}{a},\quad x_1\cdot x_2\cdot x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Так как мы работаем с уравнением $x^3+px+q=0$, то сумма s равна нулю. Следовательно, данная матрица является вырожденной.

Пример 7. Вычислить определитель квадратной матрицы A размера 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычисление определителя путем приведения к ступенчатому виду, как нетрудно предсказать, будет громоздким и утомительным. Изучив несколько десятков книг и перебрав не одну сотню вариантов решения, можно заметить, что ситуация значительно упростится, если ... умножить исходную матрицу на транспонированную! Действительно,

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \ \rho = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Определитель полученной матрицы может быть найден, с одной стороны, как произведение диагональных элементов

$$det\big(A \cdot A^T\big) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4,$$

а с другой, как квадрат искомой величины:

$$det(A \cdot A^T) = det\ A \cdot det\ A^T = det\ A \cdot det\ A = (det\ A)^2.$$

Объединив два равенства, мы придем к уравнению

$$(det\ A)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 \ \Rightarrow \ det\ A = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

Выбор знака для искомого определителя мы оставляем сейчас без внимания, его постановка станет понятной после прочтения последующего материала.

Ответ: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить определители 3-го порядка.

46.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$.

47.

а) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{vmatrix}$.

48. Доказать равенство $det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot detA$, в котором число n определяет размерность матрицы A.

49. Найти определитель ортогональной матрицы.

50. Доказать, что если все элементы определителя 3-го порядка равны ± 1, то сам определитель будет четным числом.

51. Найти наибольшее значение, которое может принимать определитель 3-го порядка, все его элементы которого равны ± 1.

52. Используя свойства определителей, вычислить

$$\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 1 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 1 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Найти выражения для $f(x)$, используя данное равенство.

53. $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 - b_2 x & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} = f(x) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

54. $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = f(x) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители 4-го и 5-го порядков.

55.

а) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$.

56.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

57. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен 0.

58. Чему равен определитель, сумма строк которого с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

59. Найти площадь треугольника ABC, вершины которого расположены в точках $A(2,1)$, $B(0,-2)$ и $C(-4,3)$.

60. Доказать, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих частей.

5 Методы вычисления определителей

Понятие определителя рассмотрено в рамках аксиоматического подхода. При кажущейся наглядности и логичности он обладает неожиданной на первый взгляд тонкостью. При перечислении основных свойств детерминанта мы неявно исходили из предположения, что функция с требуемыми свойствами существует и, более того, единственна. Однако такого рода предположения не являются априори истинными и требуют доказательства. Вполне могло случиться так, что функций с перечисленными свойствами не нашлось бы вовсе или существовало бесчисленное множество.

Рассматриваемый ниже альтернативный подход представляет собой индуктивное описание функции-определителя, вычисление которой осуществляется посредством последовательного уменьшения размерности. Существенным недостатком при этом становится количество необходимых арифметических операций: зависимость этого числа от размерности матрицы выражается факториалом. Однако для малых размерностей он обладает огромной практической значимостью.

Ранее мы отмечали важность геометрического аспекта теории определителей в задачах на вычисление площади, и впоследствии рассмотрим аналогичные способы нахождения объемов. При обсуждении наиболее распространенных алгебраических приложений мы остановимся на методе Крамера, применяемом при решении квадратных систем, и формуле для обратной матрицы. Но прежде всего покажем, как можно построить функцию, обладающую свойствами антисимметричности, линейности и нормированности, и докажем, что эти свойства влекут за собой единственность.

Теорема 5.1. *Пусть F_1 и F_2 — функции, определенные на множестве квадратных матриц и обладающие свойствами антисимметричности, линейности и нормированности. Тогда для любой квадратной матрицы A имеет место равенство $F_1(A) = F_2(A)$.*

□ Принимая во внимание свойство обратимости, рассмотрим два возможных случая.

1. Если матрица A является необратимой, то по лемме 4.5 имеем: $F_1(A) = F_2(A) = 0$.

2. Если матрица имеет обратную, мы можем представить ее в виде произведения матриц элементарных преобразований: $A = R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_k$. Согласно формулам (2), функции F_1 и F_2 обязаны на них совпадать:

$$F_1(R_j) = F_2(R_j) \qquad \forall\ 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Используя теорему 4.6, получим

$$F_1(A) = F_1(R_1 \cdot \ldots \cdot R_k) = F_1(R_1) \cdot \ldots \cdot F_1(R_k) =$$

$$= F_2(R_1) \cdot \ldots \cdot F_2(R_k) = F_2(A). \blacksquare$$

5.1 Разложение определителя

Как было показано выше, функция-определитель может быть найдена однозначно. Для доказательства ее существования мы предложим явный способ вычисления, основанный на принципе математической индукции.

Определение. Пусть A — квадратная матрица размера $n \times n$. Тогда *минором* матрицы M_{ij} (дополнительным к элементу a_{ij}) называется определитель матрицы размера $(n-1) \times (n-1)$, которая получается из A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j. При этом произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij}.

Индуктивное описание функции det проведем в два этапа:

- определитель матриц размера 2×2 зададим формулой

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc, \tag{3}$$

- определитель размерности n сведем к определителям порядка $n-1$ с помощью равенства

$$detA_{n\times n} = a_{11}\cdot M_{11} - a_{21}\cdot M_{21} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}\cdot M_{n1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_{k1}\cdot M_{k1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}\cdot\left((-1)^{k+1}\cdot M_{k1}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}\cdot A_{k1}. \tag{4}$$

Теорема 5.2. *Функция det, определенная индуктивно равенствами (3) и (4), обладает свойствами антисимметричности, линейности и нормированности.*

□ Согласно определению, доказательство необходимо проводить методом математической индукции. *База индукции* — доказательство теоремы для квадратных матриц второго порядка.

Проверим сначала свойство антисимметричности формулы (3) для матрицы $A_{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow det\left(R^{(1)\leftrightarrow(2)}\cdot A\right) = det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad =$$

$$= -(ad-bc) = -det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -detA.$$

Свойство линейности, в силу доказанного, достаточно проверить для элементов первой строки:

$$det\begin{pmatrix} \lambda\cdot a & \lambda\cdot b \\ c & d \end{pmatrix} = (\lambda a)\cdot d - (\lambda b)\cdot c = \lambda\cdot(ad-bc) = \lambda\cdot\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$det\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c & d \end{pmatrix} = (a_1+a_2)d - (b_1+b_2)c =$$

$$= (a_1d - b_1c) + (a_2d - b_2c) = det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Проверка нормированности не представляет труда:

$$DetE_2 = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

Индуктивный переход: предположим, что утверждение теоремы верно для определителей порядка $2, 3, \ldots, (n-1)$, и проверим свойства антисимметричности, линейности и нормированности формулы (4) для определителя матрицы размера $n \times n$.

Сначала установим свойство антисимметричности для перестановки соседних строк, с номерами i и $i+1$. Обозначим через B произведение $\left(R^{(i)\leftrightarrow(i+1)} \cdot A\right)$ и воспользуемся формулой (4):

$$detB = det\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{(i+1)} \\ \boxed{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot b_{k1} \cdot M^B_{k1}.$$

В правой части равенства вычленим слагаемые, соответствующие значениям $k = i$ и $k = i+1$:

$$detB = \sum_{k \neq i,\ i+1} (-1)^{k-1} b_{k1} M^B_{k1} + (-1)^{i-1} b_{i1} M^B_{i1} + (-1)^{i} b_{i+1,1} M^B_{i+1,1} =$$

$$= \sum_{k \neq i,\ i+1} (-1)^{k-1} a_{k1} M^B_{k1} + (-1)^{i-1} a_{i+1,1} M^B_{i1} + (-1)^{i} a_{i,1} M^B_{i+1,1}.$$

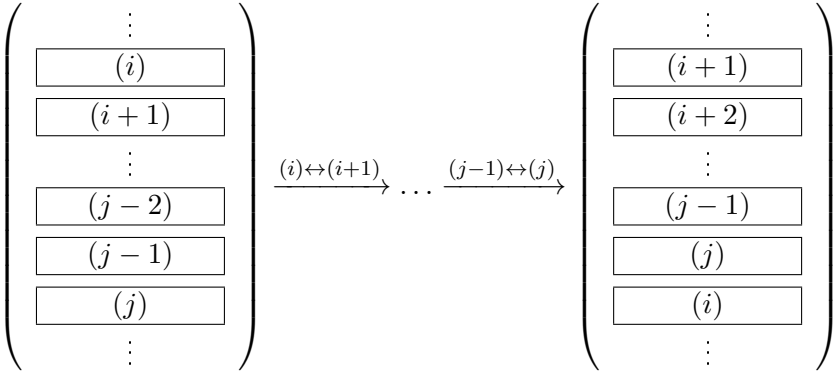
Миноры M^B_{k1} при $k \neq i, i+1$ получаются из миноров исходной матрицы M^A_{k1} перестановкой двух строк. Так как они имеют порядок $n-1$, то к ним можно применить предположение индукции и вывести равенство $M^B_{k1} = -M^A_{k1}$. Оставшиеся два минора связаны соотношениями $M^B_{i1} = M^A_{i+1,1}$, $M^B_{i+1,1} = M^A_{i,1}$, поэтому

$$detB = \sum_{k \neq i,\ i+1} (-1)^{k-1} a_{k1} \Big(- M^A_{k1} \Big) + (-1)^{i-1} a_{i+1,1} M^A_{i+1,1} +$$

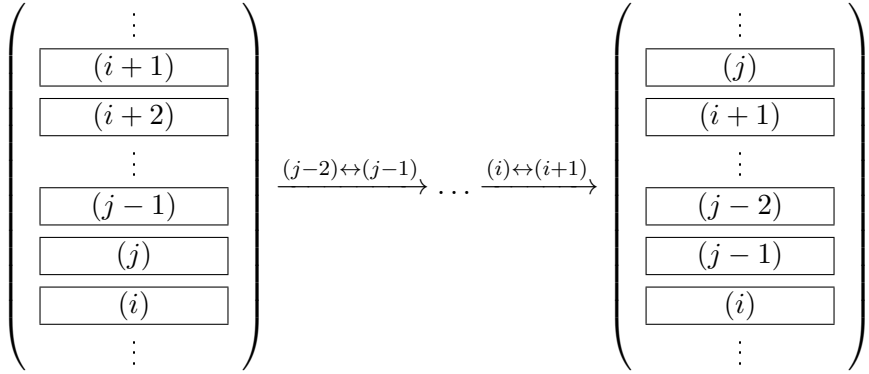
$$+(-1)^i a_{i,1} M^A_{i,1} = -\left(\sum_{k\neq i,\ i+1} (-1)^{k-1} \cdot a_{k1} M^A_{k1} + (-1)^i a_{i+1,1} M^A_{i+1,1} + \right.$$

$$\left. +(-1)^{i-1} \cdot a_{i,1} \cdot M^A_{i,1} \right) = -\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot a_{k1} \cdot M^A_{k1} \right) = -detA.$$

Итак, при перестановке двух соседних строк определитель меняет знак. Общий случай перестановки строк с номерами (i) и (j) сведем к уже рассмотренному. Опуская сначала строку с номером i



а затем поднимая строку с номером j



мы совершим $j-i+(j-1-i)=2(j-1)-1$ перестановок соседних строк, поэтому, согласно доказанному,

$$det\left(R^{(i)\leftrightarrow(j)}\cdot A\right)=(-1)^{2(j-i)-1}\cdot detA=-detA.$$

Таким образом, свойство антисимметричности доказано. Обратимся к линейности, проверка которой потребует значительно меньших усилий. Пусть $C=R^{c\cdot(i)}\cdot A$, тогда

$$detC=det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ c\cdot a_{i1} & \dots & c\cdot a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{k\neq i}(-1)^{k-1}\cdot a_{k1}\cdot M^C_{k1}+(-1)^{i-1}\cdot(c\cdot a_{i1})\cdot M^C_{i1}.$$

Миноры M^C_{k1} при $k\neq i$ получаются из миноров исходной матрицы M^A_{k1} умножением соответствующей строки на число c. Они имеют порядок $n-1$, поэтому к ним применимо предположение индукции: $M^C_{k1}=c\cdot M^A_{k1}$. Миноры M^C_{i1} и M^A_{i1} совпадают, поэтому

$$detC=\sum_{k\neq i}(-1)^{k-1}\cdot a_{k1}\cdot\left(cM^A_{k1}\right)+(-1)^{i-1}\cdot(ca_{i1})\cdot M^A_{i1}=$$

$$=c\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot a_{k1}\cdot M^A_{k1}=c\cdot detA.$$

Линейность относительно суммы строк рассматривается аналогично. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mu_{i1}+\nu_{i1} & \dots & \mu_{in}+\nu_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

$$A^{\mu}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{i1} & \dots & \mu_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ A^{\nu}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \nu_{i1} & \dots & \nu_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

докажем, что $detA = detA^{\mu} + detA^{\nu}$. Учитывая равенство $M^A_{i1} = M^{\mu}_{i1} = M^{\nu}_{i1}$, имеем:

$$detA=\sum_{k\neq i}(-1)^{k-1}\cdot a_{k1}\cdot M^A_{k1}+(-1)^{i-1}\cdot(\mu_{i1}+\nu_{i1})\cdot M^A_{i1}=$$

$$=\sum_{k\neq i}(-1)^{k-1}\cdot a_{k1}\cdot\left(M^{\mu}_{k1}+M^{\nu}_{k1}\right)+(-1)^{i-1}\cdot\mu_{i1}\cdot M^{\mu}_{i1}+(-1)^{i-1}\cdot\nu_{i1}\cdot M^{\nu}=$$

$$=\left(\sum_{k\neq i}(-1)^{k-1}\cdot a_{k1}\cdot M^{\mu}_{k1}+(-1)^{i-1}\cdot\mu_{i1}\cdot M^{\mu}_{i1}\right)+$$

$$+\left(\sum_{k\neq i}(-1)^{k-1}\cdot a_{k1}\cdot M^{\nu}_{k1}+(-1)^{i-1}\cdot\nu_{i1}\cdot M^{\nu}_{i1}\right)=detA^{\mu}+detA^{\nu}.$$

Наконец, проверим нормированность определителя. Так как при вычеркивании первого столбца и первой строки единичной матрицы порядка n получается единичная матрица порядка $n-1$, имеем:

$$\det E_n=1\cdot M^E_{11}+0\cdot M^E_{21}+\ldots+0\cdot M^E_{n1}=M^E_{11}=\det E_{n-1}=1.$$

Теорема полностью доказана. ■

⟲ Поясним вычисление определителя на следующем примере:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=$$

$= 1\cdot(5\cdot 9-8\cdot 6)-4\cdot(2\cdot 9-3\cdot 8)+7\cdot(2\cdot 6-3\cdot 5) = -3+24-21 = 0.$ ⟲

Мы доказали, что определитель может быть найден по формуле

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot a_{k1}\cdot M_{k1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}\cdot A_{k1},$$

которая представляет собой *разложение определителя по* 1*-му столбцу*. Покажем, что определитель можно раскладывать по столбцу с произвольным номером, а также по любой строке.

Теорема 5.3. *Пусть A — квадратная матрица размера $n\times n$. Тогда для любых чисел $1\leqslant i,j\leqslant n$ справедливы равенства*

$$detA = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}\cdot a_{kj}\cdot M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\cdot A_{kj},$$

$$detA = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\cdot a_{ik}\cdot M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik}.$$

□ Так как $detA = detA^T$, доказательства требует только первое равенство. Рассмотрим матрицу

$$B = A\cdot R^{(j-1)\leftrightarrow(j)}\cdot R^{(j-2)\leftrightarrow(j-1)}\cdot\ldots\cdot R^{(2)\leftrightarrow(3)}\cdot R^{(1)\leftrightarrow(2)},$$

полученную из A последовательностью перестановок столбцов

$$(j-1)\leftrightarrow(j),\ (j-2)\leftrightarrow(j-1),\ \ldots,\ (2)\leftrightarrow(3),\ (1)\leftrightarrow(2).$$

Тогда, согласно свойству антисимметричности,

$$detA = (-1)^{j-1}det\begin{pmatrix} a_{1j} & a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{nj} & a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Разложим $detB$ по первому столбцу:

$$detB = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \cdot b_{k1} \cdot M_{k1}^{B} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \cdot a_{kj} \cdot M_{kj}^{A}.$$

Объединив все равенства, получим:

$$detA = (-1)^{j-1} \cdot \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \cdot a_{kj} \cdot M_{kj}^{A} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot M_{kj}^{A}. \blacksquare$$

5.2 Приложения определителей

При работе с квадратной системой линейных уравнений, определители позволяют установить ее определенность и найти решение без приведения расширенной матрицы к ступенчатому виду. Соответствующий алгоритм называется *методом Крамера*.

Рассмотрим систему линейный уравнений $Ax = b$ относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$, для которой матрица A имеет размер $n \times n$, а правая часть b составлена из чисел $b_1, \ldots, b_n$. Обозначим через Δ определитель основной матрицы, а через $\Delta_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, — определители матриц, которые получаются из A заменой столбца с номером k на правую часть системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 5.4. *Система линейных уравнений с квадратной матрицей A определена тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$. В этом случае решение системы может быть найдено по формулам $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$.*

Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_k отличен от нуля, система является несовместной.

□ Пусть числа $x_1, \ldots, x_n$ составляют решение системы. Тогда правая часть представляется в виде линейной комбинации столбцов основной матрицы с коэффициентами $x_1, \ldots, x_n$:

$$x_1 \cdot \boxed{1} + \ldots + x_k \cdot \boxed{k} + \ldots + x_n \cdot \boxed{n} = \boxed{b} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \boxed{j} = \boxed{b}.$$

Выразим из этого равенства слагаемое с номером k

$$x_k \cdot \boxed{k} = \boxed{b} - \sum_{j \neq k} x_j \cdot \boxed{j}$$

и вычислим произведение $x_k \cdot \Delta$, опираясь на свойство линейности определителя:

$$x_k \cdot \Delta = x_k \cdot det \left(\boxed{1} \ldots \boxed{n} \right) = det \left(\boxed{1} \quad \ldots \quad x_k \cdot \boxed{k} \quad \ldots \quad \boxed{n} \right) =$$

$$= det \left(\boxed{1} \quad \ldots \quad \underbrace{\boxed{b} - \sum_{j \neq k} x_j \cdot \boxed{j}}_{k\text{-й столбец}} \quad \ldots \quad \boxed{n} \right) =$$

$$det \left(\boxed{1} \quad \ldots \quad \boxed{b} \quad \ldots \quad \boxed{n} \right) - \sum_{j \neq k} x_j det \left(\boxed{1} \quad \ldots \quad \boxed{j} \quad \ldots \quad \boxed{n} \right)$$

$$= det\left(\boxed{1} \quad \dots \quad \boxed{b} \quad \dots \quad \boxed{n}\right) = \Delta_k.$$

Предпоследний переход основан на равенстве нулю всех определителей, стоящих под знаком суммы (каждый из них содержит пару совпадающих столбцов).

Таким образом, если определитель основной матрицы отличен от нуля, то система имеет единственное решение $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$. Если же $\Delta = 0$, а один из дополнительных миноров Δ_k отличен от нуля, то равенство $x_k \cdot \Delta = \Delta_k$ выполняться не может, поэтому система оказывается несовместной. ■

↻ Решим систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

Руководствуясь методом Крамера, вычислим необходимые миноры

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

и найдем единственное решение системы:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{15}{3} = 3, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1. \ ↺$$

Может сложиться впечатление, что применение метода Крамера сопровождается значительными ограничениями. Во-первых, система линейных уравнений должна быть квадратной, что выполняется далеко не всегда, а во-вторых, формулы приводят к решению лишь при условии определенности системы. Контраргументом выступает практическая значимость метода: системы линейных уравнений, возникающие в реальных задачах, в большинстве случаев имеют единственное решение.

Рассмотрим еще одно алгебраическое приложение определителей, касающееся задачи о нахождении обратной матрицы.

Теорема 5.5. *Пусть $A_{n\times n}$ — обратимая матрица, тогда ее обратная матрица $B = A^{-1}$ может быть найдена по формуле*

$$B = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

в которой A_{ij} — алгебраические дополнения к элементам a_{ij} исходной матрицы.

□ Зафиксируем пару различных чисел $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ и рассмотрим *фальшивое* разложение определителя исходной матрицы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$, в котором элементы строки с номером i умножаются на алгебраические дополнения элементов другой строки с номером j. Эта сумма представляет собой разложение (по строке с номером j) определителя, в котором строки с номерами i и j совпадают, поэтому она равна нулю. Следовательно, при различных i и j элемент произведения $A \cdot B$

$$\Big(A \cdot B\Big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \Big(\tfrac{1}{\det A} \cdot A^T_{kj}\Big) = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk}$$

оказывается равным нулю. В случае равенства $i = j$ последняя сумма представляет собой подлинное разложение определителя по i-ой строке, поэтому $\Big(A \cdot B\Big)_{ii} = 1$. Таким образом, результатом произведения $A \cdot B$ является единичная матрица и $B = A^{-1}$. ■

⟲ Найдем обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Поскольку определитель матрицы

$$det\ A = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1$$

отличен от нуля, то матрица обратима и мы можем воспользоваться

формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Для квадратных матриц второго порядка нахождение алгебраических дополнений не требует практически никаких вычислений:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 8 = 8, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Таким образом, искомая матрица имеет вид $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. ⟲

5.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Используя разложение по строке или столбцу, найти определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления определителя методом редукции мы вправе выбрать произвольную строку/столбец. При этом выбор, как правило, обусловлен вычислительными затратами: чем больше нулевых элементов расположено в строке/столбце, тем меньшим числом слагаемых предстоит оперировать. Матрица A предоставляет нам шесть вариантов разложения, четыре из которых будут

содержать три слагаемых, а остальные — два. Мы остановимся на третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 2. Вычислить определитель матрицы $A_{3\times 3}$.

Решение. Рассмотрим произвольную матрицу третьего порядка, разложим ее определитель по первой строке, и воспользуемся формулой для вычисления определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} p & r \\ x & z \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot (qz - yr) - b \cdot (pz - xr) + c \cdot (py - qx).$$

После раскрытия скобок мы получим искомое выражение:

$$\det = a \cdot q \cdot z + b \cdot r \cdot x + p \cdot y \cdot c - c \cdot q \cdot x - p \cdot b \cdot z - a \cdot r \cdot y.$$

Существует несколько способов визуального запоминания формулы для вычисления определителей третьего порядка. Все они основаны на разбиение шести слагаемых на две группы: представленные в формуле со знаком плюс и — со знаком минус. Мы познакомимся лишь с одним из них, который условно можно назвать "диагональным". Он состоит в приписывании к матрице дополнительных элементов, дублирующих первый и второй столбец:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ p & q & r & p & q \\ x & y & z & x & y \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице слагаемые первой группы располагаются на главных диагоналях, а второй — на побочных.

Ответ: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = a\cdot q\cdot z + b\cdot r\cdot x + p\cdot y\cdot c - c\cdot q\cdot x - a\cdot r\cdot y - p\cdot b\cdot z.$

Пример 3. Не вычисляя определитель, решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & x & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & x & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & x \end{vmatrix} = 0,$$

считая числа $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ различными.

Решение. Используя формулу для сведения вычисления определителя порядка n к вычислению определителей меньшего порядка, можно установить, что данное уравнение представимо в виде $P_{n-1}(x) = 0$, где $P_{n-1}(x)$ — некоторый многочлен порядка $n-1$, коэффициенты которого зависят от чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Такое уравнение не может иметь более $n-1$ корня, поэтому нам остается всего лишь их подобрать. Заметим, что каждая строка матрицы, начиная со второй, получается из первой заменой коэффициента a с соответствующим номером на переменную x. Таким образом, если x совпадет с одним из чисел $a_k,\ k = 1, 2, \dots, n-1$, то определитель будет содержать две одинаковые строки и превратится в нуль. Следовательно, все числа $a_k,\ k = 1, 2, \dots, n-1$, являются корнями данного уравнения, а других, как мы уже отмечали, быть не может.

Ответ: $x = a_1,\ x = a_2, \dots, x = a_{n-1}$.

Пример 4. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала вычислим определитель матрицы A:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-2)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 1 -$$

$$-\Big(1\cdot(-2)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot(-1)\Big) = 2.$$

Так как $det\ A \neq 0$, данная матрица является обратимой. Найдем алгебраические дополнения ко всем ее элементам:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{13} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{22} = -2,\ A_{23} = (-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = 4,\ A_{32} = (-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{33} = (-1)^{6}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим найденные значения в формулу для обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 5. Решить данную систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ x + y + z = 6\ . \end{cases}$$

Решение. Используя формулу для вычисления определителя третьего порядка, найдем основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 2 = 21.$$

Так как полученное число отлично от нуля, система имеет единственное решение. Теперь последовательно заменим каждый столбец основного определителя на правую часть системы:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 21, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 42, \quad \Delta_z = 63.$$

Выведем решение системы, руководствуясь методом Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{21}{21} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{42}{21} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{63}{21} = 3.$$

Ответ: $x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$

Рассмотрим пример определителей специального вида, относящийся к классу *трехдиагональных* матриц. В них главная диагональ и две соседние заполнены произвольными числами, а все остальные элементы равны нулю.

Пример 6. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим искомый определитель через D_5 (индекс указывает на размерность матрицы) и разложим его по первой строке:

$$D_5 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Второй определитель разложим по первому столбцу:

$$D_5 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

В правой части последнего равенства участвуют матрицы такого же трехдиагонального вида, только меньшей размерности, поэтому мы можем переписать его в виде следующего рекуррентного соотношения:

$$D_5 = 2D_4 - D_3.$$

Путем аналогичных рассуждений мы можем получить равенства

$$D_4 = 2D_3 - D_2 \quad \text{и} \quad D_3 = 2D_2 - D_1,$$

в которых числа D_1 и D_2 представляют собой определители первого и второго порядков:

$$D_1 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3.$$

Последовательная подстановка этих чисел в предыдущие уравнения приводит нас к следующем ответу:

$$D_3 = 2D_2 - D_1 = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \; D_4 = 2D_3 - D_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5,$$

$$D_5 = 2D_4 - D_3 = 2 \cdot 5 - 4 = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 7. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7-x & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 15-x \end{vmatrix}.$$

Решение. Если использовать, например, разложение по первой строке, затем вычислить каждый из получившихся определителей третьего порядка, раскрыть все скобки и привести подобные, то получится квадратный трехчлен относительно переменной x:

$$D(x) = ax^2 + bx + c.$$

Чтобы избежать громоздких вычислений, мы найдем коэффициенты a, b и c обходным путем: подберем корни этого трехчлена x_1 и x_2, оценим старший коэффициент a и восстановим $D(x)$ по формуле

$$D(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2).$$

Заметим, что при

$$7 - x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

первые строки определителя совпадают, и он обращается в нуль. Если же

$$15 - x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9,$$

то совпадают последние две строки и определитель вновь превращается в нуль. Таким образом,

$$x_1 = 4,\ x_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad D(x) = a \cdot (x-4)(x-9).$$

Для определения старшего коэффициента нам достаточно проследить лишь за старшей степенью переменной.

Разложим $D(x)$ по последней строке:

$$D(x) = -5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7-x & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{vmatrix} -$$

$$-8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 7-x & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} + (15-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7-x & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Первые три определителя не содержат слагаемых со старшей степенью x^2, поэтому

$$D(x) = (15-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7-x & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} + kx + b,$$

где k и b — это некоторые числа, значения которых не отразятся на результате. Далее используем разложение по второй строке:

$$D(x) = (15-x) \cdot \left(-2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + (7-x) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \right) + kx + b.$$

Первый и третий определители второго порядка не содержат переменной, следовательно,

$$D(x) = (15-x) \cdot (7-x) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + k_1 x + b_1 =$$

$$= (105 - 22x + x^2) \cdot 11 + k_1 x + b_1 = 11x^2 + k_2 x + b_2.$$

Таким образом, старший коэффициент a равен 11, а искомый трехчлен имеет вид

$$D(x) = 11 \cdot (x-4)(x-9).$$

Ответ: $11(x-4)(x-9)$.

Задачи для самостоятельной работы

61. Вычислить определители, используя разложение по третьей строке и второму столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$.

62. Вычислить определители данных матриц, используя подходящие разложения:

а) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

63. Вычислить определители указанных матриц (произвольной размерности), используя рекуррентные соотношения:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

64. Вычислить определитель матрицы $A_{n\times n} = \{a_{ij} = \min(i, j)\}$.

65. Вычислить определитель матрицы $A_{n\times n} = \{a_{ij} = \max(i, j)\}$.

Используя метод Крамера, доказать определенность систем и найти их решения.

66.

а) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$.

67.

а) $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -x + y + z = -2 \\ x - y + z = 6 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$.

68. Определить, при каком значении параметра a данная система однородных уравнений имеет ненулевое решение:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ ax - 14y + 15z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}.$$

Найти обратные матрицы.

69.

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

70.

а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

71.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

72. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, предварительно вычислив A^{-1} с помощью алгебраических дополнений:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

73. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, предварительно вычислив A^{-1} с помощью алгебраических дополнений:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

74. Доказать равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}\beta & \operatorname{tg}\gamma \\ \operatorname{tg}^2\alpha & \operatorname{tg}^2\beta & \operatorname{tg}^2\gamma \end{vmatrix} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}.$$

75. Доказать, что если система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

совместна, то

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

6 Линейная зависимость векторов

Матричная алгебра и теория определителей находят широкое применение в тех случаях, когда в центре внимания оказываются векторы. Многогранное по своей природе, понятие вектора может иметь физическую, геометрическую или алгебраическую интерпретацию. В физике вектор трактуется как перемещение из одной точки в другую, в геометрии он соответствует направленному отрезку, а в алгебре — описывается набором координат. Мы остановимся на последнем представлении о векторе и, оставаясь в рамках высшей алгебры, изучим ключевые свойства векторных систем.

Встречающиеся в реальных задачах системы векторов, как правило, оказываются бесконечными. Поэтому проверка каких-либо гипотез, касающихся их структур, или выявление существующих закономерностей не могут осуществляться по принципу простого перебора. Основой аналитического исследования в таких случаях становятся понятия линейной зависимости и ранга. Идея заключается в выделении конечного набора базисных элементов, характеризующих всю систему в целом, за счет которой осуществляется переход от бесконечного к конечному.

Зависимость между векторами проще всего обнаруживается с помощью элементарных преобразований. При этом они позволяют не только установить сам факт зависимости, но также найти ее явное выражение. Соответствующий алгоритм по сути аналогичен приведению матрицы к ступенчатому виду и обладает незначительными вычислительными особенностями.

Все дальнейшие рассуждения проводятся для векторов так называемого *пространства* $\mathbb{R}^n$, элементами которого служат наборы координат: $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Случай $n = 2$ приводит нас к плоскости, $n = 3$ — к пространству, в то время как высшие размерности $n > 3$ наглядными представлениями не обладают.

Для каждой системы векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ и числового набора

$c_1, c_2, \ldots, c_k$ можно определить сумму

$$\vec{v} \;=\; c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k \;=\; \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \vec{v}_j,$$

которая называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ с коэффициентами $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Если $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, то говорят о *вырожденной комбинации*, в противном случае, когда хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, линейную комбинацию называют *невырожденной*.

Определение. Конечная система векторов $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ называется *линейно зависимой*, если существует невырожденная линейная комбинация этих векторов, равная $\vec{0}$. Система V называется *линейно независимой*, если нулевой вектор может быть получен только лишь в результате вырожденной комбинации:

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

$\circlearrowleft$ Для пояснения нового определения приведем следующий пример. Рассмотрим систему, состоящую из трех векторов пространства $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 3),\ \vec{v}_2 = (4, 5, 6),\ \vec{v}_3 = (7, 8, 9)\}.$$

Данная система является линейно зависимой, поскольку можно подобрать такие коэффициенты

$$c_1 = 1,\ c_2 = -2,\ c_3 = 1,$$

что соответствующая линейная комбинация окажется нулевой:

$$1 \cdot \vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (1, 2, 3) - 2 \cdot (4, 5, 6) + (7, 8, 9) = (0, 0, 0).$$

Если же исключить из рассмотрения один из векторов, например v_3, и составить систему

$$W = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 3),\ \vec{v}_2 = (4, 5, 6)\},$$

то она будет линейно независимой. Действительно, рассмотрим произвольную линейную комбинацию $c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2$. Тогда

$$c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 \cdot (1,2,3) + c_2 \cdot (4,5,6) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (c_1 + 4c_2, 2c_1 + 5c_2, 3c_1 + 6c_2) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + 4c_2 = 0, \\ 2c_1 + 5c_2 = 0, \\ 3c_1 + 6c_2 = 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Таким образом, всякая нулевая линейная комбинация векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ является вырожденной, что означает их линейную независимость. ⟲

Приведем критерий линейной зависимости, который практически повторяет определение, однако оказывается более удобным при решении задач.

Лемма 6.1. *Система векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из этих векторов представляется в виде линейной комбинации других.*

□ *Необходимость.* Предположим, что система $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ является линейно зависимой. Тогда существует невырожденная линейная комбинация этих векторов, равная нулю:

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Невырожденность этой комбинации означает, что среди коэффициентов $c_1, \ldots, c_k$ найдется хотя бы один, отличный от нуля. Обозначим его номер буквой l и перенесем все остальные слагаемые в правую часть:

$$c_l \cdot \vec{v}_l = -c_1 \cdot \vec{v}_1 - \ldots - c_{l-1} \cdot \vec{v}_{l-1} - c_{l+1} \cdot \vec{v}_{l+1} - \ldots - c_k \cdot \vec{v}_k.$$

Так как $c_l \neq 0$, можем поделить полученное уравнение на этот коэффициент и выразить $\vec{v}_l$ через другие векторы:

$$\vec{v}_l = -\frac{c_1}{c_l} \cdot \vec{v}_1 - \ldots - \frac{c_{l-1}}{c_l} \cdot \vec{v}_{l-1} - \frac{c_{l+1}}{c_l} \cdot \vec{v}_{l+1} - \ldots - \frac{c_k}{c_l} \cdot \vec{v}_k.$$

Достаточность. Предположим, что некоторый вектор v_l представляется в виде линейной комбинации других векторов:

$$v_l = a_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + a_{l-1} \cdot \vec{v}_{l-1} + a_{l+1} \cdot \vec{v}_{l+1} + \ldots + a_k \cdot \vec{v}_k.$$

Переместив этот вектор в правую часть уравнения, выпишем нулевую линейную комбинацию:

$$a_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + a_{l-1} \cdot \vec{v}_{l-1} - v_l + a_{l+1} \cdot \vec{v}_{l+1} + \ldots + a_k \cdot \vec{v}_k = 0.$$

Так как один из коэффициентов отличен от нуля ($a_l = -1$), то полученная комбинация является невырожденной, а система $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ — линейно зависимой. ■

↻ Как было показано выше, система

$$V = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 3),\ \vec{v}_2 = (4, 5, 6),\ \vec{v}_3 = (7, 8, 9)\}$$

является линейно зависимой: $\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$. Любой из ее векторов может быть представлен в виде комбинации двух других, в частности, $\vec{v}_1 = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$. ↻

6.1 Критерии линейной зависимости

Рассмотрим систему векторов $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ и по аналогии с матричными операциями определим элементарные преобразования трех типов:

- $r^{(i) \leftrightarrow (j)}$ — перестановка векторов $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_j$;
- $r^{c \cdot (i)}$ — умножение вектора $\vec{v}_i$ на ненулевое число c;

- $r^{(i)+c\cdot(j)}$ — замена $\vec{v}_i$ линейной комбинацией $\vec{v}_i + c \cdot \vec{v}_j$.

Чтобы формализовать связь между элементарными преобразованиями матриц и векторных систем, введем следующее понятие.

Определение. Пусть система $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ лежит в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда матрица S_V размера $k \times n$, строки которой образованы координатами векторов системы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$, называется *координатной матрицей* системы V.

Сравнив определения элементарных преобразований (для матриц и векторных систем), можно сделать следующий вывод: векторная система W получается из системы V с помощью элементарного преобразования r тогда и только тогда, когда координатная матрица S_W получается из координатной матрицы S_V с помощью того же преобразования r. Покажем, что свойство линейной зависимости сохраняется при элементарных преобразованиях.

Лемма 6.2. *Пусть векторная система $W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ получается из системы $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ с помощью элементарного преобразования r. Тогда система V является линейно независимой тогда и только тогда, когда линейно независима система W.*

□ *Необходимость.* Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$c_1 \cdot \vec{w}_1 + c_2 \cdot \vec{w}_2 + \ldots + c_k \cdot \vec{w}_k = \vec{0}$$

и докажем, что все коэффициенты этой комбинации равны нулю. Рассмотрим три случая.

1) r — перестановка векторов $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_j$:

$$c_1 \cdot \vec{w}_1 + \ldots c_i \cdot \vec{w}_i + \ldots + c_j \cdot \vec{w}_j + \ldots + c_k \cdot \vec{w}_k = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots c_i \cdot \vec{v}_j + \ldots + c_j \cdot \vec{v}_i + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}.$$

В силу линейной независимости системы V, последнее равенство влечет за собой условие

$$c_1 = \ldots = c_j = \ldots = c_i = \ldots = c_k = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \ldots = c_i = \ldots = c_j = \ldots = c_k = 0.$$

2) r — умножение вектора $\vec{v}_i$ на ненулевое число c:

$$c_1 \cdot \vec{w}_1 + \ldots c_i \cdot \vec{w}_i + \ldots + c_k \cdot \vec{w}_k = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots c_i \cdot (c \cdot \vec{v}_i) + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Полученное равенство равносильно системе

$$c_1 = \ldots = c \cdot c_i = \ldots = c_k = 0.$$

Число c по определению элементарного преобразования отлично от нуля, поэтому

$$c_1 = \ldots = c \cdot c_i = \ldots = c_k = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 = \ldots = c_i = \ldots = c_k = 0.$$

3) r — замена вектора $\vec{v}_i$ линейной комбинацией векторов $\vec{v}_i + c \cdot \vec{v}_j$:

$$c_1 \cdot \vec{w}_1 + \ldots c_i \cdot \vec{w}_i + \ldots + c_j \cdot \vec{w}_j + \ldots + c_k \cdot \vec{w}_k = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots c_i \cdot (\vec{v}_i + c \cdot \vec{v}_j) + \ldots + c_j \cdot \vec{v}_j + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Перегруппируем слагаемые левой части

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots c_i \cdot (\vec{v}_i + c \cdot \vec{v}_j) + \ldots + c_j \cdot \vec{v}_j + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots c_i \cdot \vec{v}_i + (c_j + c \cdot c_i) \cdot \vec{v}_j + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$$

и воспользуемся линейной независимостью системы V:

$$c_1 = \ldots = c_i = \ldots = c_j + c \cdot c_i = \ldots = c_k = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 = \ldots = c_i = \ldots = c_j = \ldots = c_k = 0.$$

Достаточность. Пусть система W линейно независима. Тогда система V получается из W обратным преобразованием r^{-1}, поэтому в силу доказанного также является линейно независимой. ■

С помощью подходящей цепочки элементарных преобразований произвольную координатную матрицу можно привести к ступенчатому виду, в котором зависимость строк эквивалентна наличию нулевого вектора.

Теорема 6.3. *Пусть $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ — векторная система, координатная матрица S_V которой имеет ступенчатый вид. Такая система V является линейно зависимой тогда и только тогда, когда S_V содержит нулевую строку.*

□ *Необходимость*. Проведем доказательство от противного — предположим, что матрица S_V не содержит нулевых строк, и покажем, что в этом случае система V должна быть линейно независимой.

Рассмотрим нулевую линейную комбинацию векторов системы V с коэффициентами $c_1, \ldots, c_k$ и обозначим буквой m номер первой ненулевой компоненты вектора $\vec{v}_1$ (так как координатная матрица не содержит нулевых строк, такая компонента найдется). Выпишем соответствующую координату линейной комбинации:

$$\left(c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots c_i \cdot \vec{v}_i + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k\right)_m = c_1 \cdot v_{1m} + \ldots c_i \cdot v_{im} + \ldots c_k \cdot v_{km} = 0.$$

Так как матрица S_V имеет ступенчатый вид, все коэффициенты этой матрицы, расположенные под v_{1m}, равны нулю. Поэтому в данной сумме лишь первое слагаемое оказывается ненулевым:

$$c_1 \cdot v_{1m} + \ldots c_i \cdot v_{im} + \ldots c_k \cdot v_{km} = c_1 \cdot v_{1m} + \ldots c_i \cdot 0 + \ldots c_k \cdot 0 = c_1 \cdot v_{1m} = 0.$$

Неравенство $v_{1m} \neq 0$ говорит о том, что первый коэффициент линейной комбинации c_1 равен нулю.

Выбирая последовательно первые ненулевые компоненты векторов $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$, с помощью аналогичных рассуждений мы придем к равенствам $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, которые означают вырожденность линейной комбинации и, как следствие, независимость системы строк.

Достаточность. Предположим, что последняя строка матрицы S_V состоит исключительно из нулей. Это означает, что последний

вектор системы v_k равен $\vec{0}$. Выпишем следующую нулевую линейную комбинацию:

$$0 \cdot \vec{v}_1 + \ldots 0 \cdot \vec{v}_i + \ldots + 0 \cdot \vec{v}_{k-1} + 1 \cdot \vec{v}_k = \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Последний коэффициент этой комбинации отличен от нуля, поэтому она является невырожденной. Следовательно, система V линейно зависима. ■

Следствие. *Линейно независимая система векторов пространства $\mathbb{R}^n$ не может содержать более n векторов.*

□ Предположим, что система $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ состоит из векторов пространства $\mathbb{R}^n$, при этом $k > n$. Тогда в координатной матрице этой системы число строк превосходит число столбцов, поэтому после приведения к ступенчатому виду в ней обязательно появится нулевая строка. Согласно доказанной теореме, система V линейно зависима. ■

Теорема 6.3 позволяет при исследовании линейной зависимости векторных систем использовать алгоритм приведения к ступенчатому виду: если после приведения координатной матрицы к ступенчатому виду в ней будет содержаться нулевая строка, то исходная система является линейно зависимой.

⟳ Рассмотрим систему векторов

$$V = \{\vec{v}_1 = (5, -2, 1, 1),\ \vec{v}_2 = (-2, 3, 1, 0),$$
$$\vec{v}_3 = (2, -1, 3, 1), \vec{v}_4 = (-1, -2, 1, 0)\}$$

и покажем, что она является линейно зависимой. Для этого запишем координатную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)+(2)]{(4)\leftrightarrow(1)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-2\cdot(1)]{(4)+5\cdot(1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -12 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-3\cdot(3)]{(4)+6\cdot(3)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 7 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{(3)-2\cdot(2)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 30 & 7 \\ 0 & 0 & 30 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)-(3)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 30 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка матрицы оказалась нулевой, следовательно, исходная система линейно зависима. ⟲

6.2 Базис системы векторов

Линейная зависимость векторов, означающая возможность представления как минимум одного элемента системы в виде комбинации других, является качественной характеристикой. Существует ее количественный аналог, требующий более емкого и подробного описания.

Определение. Число r называется *рангом* системы векторов $V = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ и обозначается $r = rkV$, если

1) среди векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ можно выбрать подсистему, состоящую из r линейно независимых элементов;

2) любая подсистема векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$, в которой число элементов превышает r, является линейно зависимой.

Согласно определению, ранг конкретной системы можно вычислить индуктивно, последовательно увеличивая число независимых векторов до максимального. Приведенное выше следствие теоремы 6.3 гарантирует, что указанный процесс не может продолжаться до бесконечности.

$\circlearrowleft$ Рассмотрим систему $V = \{\vec{v}_1 = (2,1,3),\ \vec{v}_2 = (-1,2,1), \vec{v}_3 = (7,-4,3)\}$. Первые два вектора этой системы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ линейно независимы, при этом вся система, состоящая из трех векторов, является линейно зависимой. Согласно определению, $rkV = 2$. $\circlearrowright$

Лемма 6.4. *Если каждый вектор системы $V = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ выражается в виде линейной комбинации векторов системы $W = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$, то ранг системы V не превосходит числа векторов системы W.*

$\square$ Рассмотрим произвольную подсистему v, в которой количество элементов превышает r, и в ней произвольные векторы $\{\vec{v}_{i_1}, \ldots, \vec{v}_{i_{r+1}}\}$. Разложим каждый из них по системе W и составим координатную матрицу S, которая будет иметь размеры $(r+1)\times r$. Поскольку число строк матрицы S больше числа столбцов, то согласно теореме 6.3, набор $\{\vec{v}_{i_1}, \ldots, \vec{v}_{i_{r+1}}\}$ является линейно зависимым. Следовательно, ранг системы V не превосходит r. $\blacksquare$

Если ранг системы найден, $rkV = r$, и выбрано максимально возможное число независимых векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$, то все оставшиеся элементы системы оказываются от них зависимыми. Действительно, добавляя к максимальной системе произвольный вектор $\vec{v}$, мы получим зависимый набор $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}$. В соответствующей нулевой комбинации

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + c_r \cdot \vec{v}_r + c \cdot \vec{v} = \vec{0}, \quad c_1^2 + \ldots c_r^2 + c^2 \neq 0,$$

последний коэффициент c обязан быть отличен от нуля, так как в противном случае

$$c_1\cdot\vec{v}_1+\ldots+c_r\cdot\vec{v}_r+c\cdot\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow c_1\cdot\vec{v}_1+\ldots+c_r\cdot\vec{v}_r = \vec{0} \Leftrightarrow c_1 = \ldots = c_r = 0$$

комбинация оказывается тривиальной. Следовательно,

$$\vec{v} = -\frac{c_1}{c}\cdot\vec{v}_1 - \frac{c_2}{c}\cdot\vec{v}_2 - \ldots - -\frac{c_r}{c}\cdot\vec{v}_r.$$

Определение. Пусть V — произвольная система векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Совокупность элементов этого множества $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ называется *базисом* V, если

1) векторы $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ линейно независимы;

2) любой вектор $\vec{v} \in V$ представляется в виде комбинации

$$\vec{v} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + c_r \cdot \vec{v}_r.$$

При этом числа $c_1, \ldots, c_r$ называются *координатами вектора* $\vec{v}$ в базисе $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$.

↻ Покажем, что векторы $\vec{e}_1 = (1, 2, 3), \vec{e}_2 = (0, 1, 2), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$. Координатная матрица этой системы имеет ступенчатый вид и не содержит нулевых строк, следовательно, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимы. При этом любой вектор $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ пространства $\mathbb{R}^3$ представляется в виде следующей линейной комбинации:

$$\vec{v} = (v_1 - 2v_2 + v_3) \cdot \vec{e}_1 + (v_2 - 2v_3) \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3. \ ↺$$

Рассмотрим систему $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ векторов пространства $\mathbb{R}^n$, координатная матрица которой совпадает с единичной:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \ \ldots$$

$$\ldots, \ \vec{e}_{n-1} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0), \ \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 0, 1).$$

По теореме 6.3 система E линейно независима, при этом произвольный вектор $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ может быть представлен в виде следующей линейной комбинации:

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + v_n \cdot \vec{e}_n.$$

Построенная система E, состоящая из n векторов, называется *стандартным базисом пространства* $\mathbb{R}^n$.

Как правило, для данной системы V можно подобрать множество различных базисов. Неизменной характеристикой базиса, как следует из леммы 6.4, служит лишь количество образующих его элементов (которое всегда совпадает с рангом). В частности, любой базис системы $V = \mathbb{R}^n$, как и стандартный, содержит ровно n векторов. Отметим также, что в случае $V = \mathbb{R}^n$ определение базиса можно упростить и сформулировать в терминах определителей.

Лемма 6.5. *Система векторов $V = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots,\ \vec{v}_n\}$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда определитель ее координатной матрицы отличен от нуля.*

□ *Необходимость.* Поскольку система V образует базис, то векторы $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots,\ \vec{v}_n$ линейно независимы. По теореме 6.3, после приведения к ступенчатому виду координатная матрица S_V не будет содержать нулевых строк, следовательно, ее определитель отличен от нуля.

Достаточность. Предположим, что определитель координатной матрицы S_V отличен от нуля. Тогда, согласно следствию леммы 4.4, после приведения ее к ступенчатому виду нулевые строки не образуются. Следовательно, система V линейно независима. Поскольку она содержит ровно n векторов, то является базисом. ■

6.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Пусть $SABC$ — правильная пирамида, а SO — ее высота. Представить вектор SO в виде линейной комбинации векторов SA, SB и SC.

Решение. Обозначим буквой M середину ребра BC и проведем медианы AM и SM в гранях ABC и SBC соответственно. Тогда точка

O, как центр треугольника ABC, поделит отрезок AM в отношении $2:1$, считая от вершины A. Следовательно,

$$\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SM}.$$

Медиану SM мы можем представить в виде полусуммы

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{SC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB},$$

поэтому искомая комбинация имеет вид

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$$

Ответ: $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

Пример 2. Показать, что система векторов

$$S = \{\vec{v}_1 = (1,2,3,4),\ \vec{v}_2 = (4,3,2,1),\ \vec{v}_3 = (10,10,10,10)\}$$

является линейно зависимой, и привести пример нулевой линейной комбинации данных векторов.

Решение. Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через другие. Покажем, что $\vec{v}_3$ можно представить в виде комбинации $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_3 = \alpha\cdot\vec{v}_1 + \beta\cdot\vec{v}_2, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Запишем это векторное равенство в координатах и решим полученную систему линейных уравнений:

$$\vec{v}_3 = \alpha\cdot\vec{v}_1 + \beta\cdot\vec{v}_2 \ \Leftrightarrow\ (10,10,10,10) = \alpha\cdot(1,2,3,4) + \beta\cdot(4,3,2,1) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha + 4\beta = 2\alpha + 3\beta = 3\alpha + 2\beta = \alpha + 4\beta = 10 \ \Leftrightarrow\ \alpha = \beta = 2.$$

Таким образом, вектор $\vec{v}_3$ представляет собой сумму $2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, а искомая нулевая комбинация может быть записана в виде

$$2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}.$$

Ответ: $2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$.

Пример 3. Представить вектор $\vec{x} = (2, 3, 4, 1)$ в виде линейной комбинации векторов

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (-1, -1, -1, 1), \quad \vec{v}_3 = (1, 2, 3, -4).$$

Решение. Обозначим коэффициенты искомой комбинации буквами a, b и c и обратимся к координатам векторов:

$$\vec{x} = a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2 + c \cdot \vec{v}_3 \quad \Leftrightarrow \quad (2, 3, 4, 1) = a \cdot (1, 1, 1, 1) +$$

$$+ b \cdot (-1, -1, -1, 1) + c \cdot (1, 2, 3, -4).$$

Перепишем векторное равенство в виде системы уравнений:

$$a - b + c = 2, \quad a - b + 2c = 3, \quad a - b + 3c = 4, \quad a + b - 4c = 1.$$

Вычтем первое уравнение из второго

$$a-b+c = 2, \ \ a-b+2c = 3 \ \ \Rightarrow \ \ (a-b+2c)-(a-b+c) = 3-2 \ \ \Leftrightarrow \ \ c = 1$$

и подставим найденное значение в последние два уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b + 3c = 4 \\ a + b - 4c = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - b + 3 = 4 \\ a + b - 4 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2. \end{array} \right.$$

Таким образом, вектор $\vec{x}$ может быть представлен в виде

$$\vec{x} = a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2 + c \cdot \vec{v}_3 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3.$$

Ответ: $\vec{x} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

Пример 4. Показать, что система

$$S = \{\vec{v}_1 = (1, -2, 3),\ \vec{v}_2 = (1, -1, 6),\ \vec{v}_3 = (2, -4, 7)\}$$

является линейно независимой, и представить вектор $\vec{x} = (3, -7, 7)$ в виде линейной комбинации данных векторов.

Решение. Рассмотрим линейную комбинацию данных векторов с неопределенными коэффициентами c_1, c_2, c_3 и докажем, что она представляет собой нулевой вектор лишь в том случае, когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Обратимся к координатам векторов и составим систему линейных уравнений:

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + c_3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ -2c_1 - c_2 - 4c_3 = 0 \\ 3c_1 + 6c_2 + 7c_3 = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом подстановки:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ -2c_1 - c_2 - 4c_3 = 0 \\ 3c_1 + 6c_2 + 7c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 - 2c_3 \\ c_2 = 0 \\ 3c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, система S является линейно независимой. Чтобы представить $\vec{x}$ в виде комбинации векторов из S, снова обратимся к координатам и решим соответствующую систему методом Гаусса:

$$c_1 \cdot (1, -2, 3) + c_2 \cdot (1, -1, 6) + c_3 \cdot (2, -4, 7) = (3, -7, 7) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -4 & -7 \\ 3 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-3\cdot(1)]{(2)+2\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-3\cdot(2)]{(1)-(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\vec{x} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

Пример 5. Пусть $V = \{\vec{v}_1 = (2,1,3),\ \vec{v}_2 = (-1,2,1), \vec{v}_3 = (7,-4,3)\}$. Выяснить, является ли данная система линейно зависимой. При положительном ответе привести пример нулевой невырожденной линейной комбинации.

Решение. Приведем координатную матрицу системы к ступенчатому виду, приписав справа от нее единичную матрицу и выполнив с ней те же элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)+7\cdot(1)]{(2)+2\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Третья строка матрицы оказалась нулевой, следовательно, исходная система линейно зависима. Коэффициенты нулевой линейной комбинации исходной системы векторов $c_1 = -2,\ c_2 = 3, c_3 = 1$ записаны в третьей строке матрицы, расположенной справа от вертикальной черты:

$$c_1\cdot\vec{v}_1 + c_2\cdot\vec{v}_2 + c_3\cdot\vec{v}_3 = -2\cdot(2,1,3) + 3\cdot(-1,2,1) + 1\cdot(7,-4,3) = (0,0,0).$$

Ответ: $-2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

Пример 6. Найти ранг системы векторов

$$S = \{\vec{v}_1 = (1,-2,3,-1,-1),\ \vec{v}_2 = (2,-1,1,0,-2),$$

$$\vec{v}_3 = (1,-1,-1,-1,1),\ \vec{v}_4 = (1,3,-10,1,3)\}.$$

Решение. Запишем координатную матрицу системы S и приведем

ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-(1)]{\substack{(2)-2\cdot(1) \\ (3)-(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -13 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-2\cdot(2),\ (4)-5\cdot(2)]{(2)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Последние две строки оказались равными, что говорит о линейной зависимости системы S, поэтому $rk\ S < 4$. С другой стороны, если бы мы ограничились первыми тремя векторами системы S и проделали те же элементарные преобразования, то получили бы матрицу ступенчатого вида без нулевой строки. Поэтому подсистема $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ является линейно независимой и $rk\ S \geqslant 3$. Объединив полученные неравенства, находим $rk\ S = 3$.

Ответ: $rk\ S = 3$.

Пример 7. Найти все значения параметра k, при которых система

$$S = \{\vec{v}_1 = (1, -1, 1, -1),\ \vec{v}_2 = (1, 2, -3, 2),$$

$$\vec{v}_3 = (1, 1, -2, 3),\ \vec{v}_4 = (2, -1, 1, k)\}$$

образует базис пространства $\mathbb{R}^4$. Для остальных значений параметра описать базис для системы S и выразить через него остальные векторы.

Решение. Приведем координатную матрицу системы S к ступенчатому виду, записывая последовательность действий с помощью

единичной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)-2\cdot(1)]{(2)-(1),\ (3)-(1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & k+2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-3\cdot(2),\ (4)-2\cdot(2)]{(3)\leftrightarrow(4),\ (2)\leftrightarrow(3)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & k+2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3k-3 & 5 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2k & 3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-(3)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & k+2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3k-3 & 5 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, определитель координатной матрицы отличен от нуля при $k \neq -3$ и для этих значений параметра система образует базис $\mathbb{R}^4$. Если же $k = -3$, то первые три ветора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ образуют базис S, а последний вектор $\vec{v}_4$ выражается через них в виде комбинации $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ (см. последнюю строку финальной матрицы, расположенную справа от вертикальной черты).

Ответ: при $k \neq -3$ система S образует базис $\mathbb{R}^4$;
при $k = -3$ векторы $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ образуют базис S, а $\vec{v}_4 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$.

Задачи для самостоятельной работы

76. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми:

а) $\{(1,1,1,1),(1,-1,-1,1),(1,-1,1,-1),(1,1,-1,-1)\}$;

б) $\{(5,-3,2,1,10),(-1,8,1,-1,7),(2,1,9,-3,6),(1,3,-5,9,11)\}$.

77. Доказать, что система векторов будет линейно зависимой, если

а) она содержит нулевой вектор;

б) она содержит два вектора, отличающихся скалярным множителем.

78. Доказать, что

а) система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима;

б) любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

79. Дополнить следующие системы векторов так, чтобы они стали базисом пространства $\mathbb{R}^4$:

а) $\{(2,2,7,-1),(3,-1,2,4),(1,1,3,1)\}$;

б) $\{(2,3,-4,-1),(1,-2,1,3)\}$.

80. Проверить, что следующие системы векторов образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $x_1=(1,2,3,\ldots,n), x_2=(0,2,3,\ldots,n),\ldots,x_n=(0,0,0,\ldots,n)$;

б) $x_1=(1,1,1,\ldots,1,1,1), x_2=(1,1,1,\ldots,1,1,0)$,
$x_3=(1,1,1,\ldots,1,0,0),\ldots,x_n=(1,0,0,\ldots,0,0,0)$.

81. Пусть система векторов $x_1,x_2,\ldots,x_k$ линейно независима, а система $x_1,x_2,\ldots,x_k,y$ линейно зависима. Доказать, что

а) вектор y представим в виде линейной комбинации векторов $x_1,x_2,\ldots,x_k$;

б) разложение вектора y по этой системе единственно.

82. Векторы $e_1,\ldots,e_n$ и x заданы координатами в некотором базисе:

а) $e_1=(1,1,1),\ e_2=(1,1,2),\ e_3=(1,2,3),\ \ x=(6,9,14)$,

б) $e_1=(2,1,-3),\ e_2=(3,2,-5),\ e_3=(1,-1,1),\ \ x=(6,2,-7)$.

Доказать, что $\{e_1,\ldots,e_n\}$ является базисом и найти координаты вектора x в этом базисе.

83. Доказать, что определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда система векторов, образованных его строками (столбцами), линейно зависима.

84. Найти базис и ранг системы

$$S = \{(1,0,0,-1),(2,1,1,0),(1,1,1,1),(1,2,3,4),(0,1,2,3)\}.$$

85. Найти базис и ранг системы

$$S = \{(1,1,1,1,0),(1,1,-1,-1,-1),$$

$$(2,2,0,0,-1),(1,1,5,5,2),(1,-1,-1,0,0)\}.$$

86. Представить молекулы CH_4, CH_2O, O_2 и H_2O как векторы в пространстве с базисом $\{H, C, O\}$. Доказать, что соответствующие векторы линейно зависимы, и выписать их нулевую нетривиальную линейную комбинацию.

87. Представить вещества $CO_2, H_2O, HCO_3^-, H_3O^+$ как векторы в пространстве $\{H, C, O, +\}$. Доказать, что соответствующие векторы линейно зависимы, и выписать их нулевую нетривиальную линейную комбинацию.

88. Рассмотреть гомологический ряд предельных углеводородов C_nH_{2n+2} как систему векторов $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ в пространстве с базисом $\{H, C_1, C_2, C_3, C_4\}$, где C_1, C_2, C_3, C_4 — атомы углерода, соединенные с одним, двумя, тремя и четырьмя атомами C соответственно. Пользуясь структурной формулой и классическими правилами насыщения валентностей, записать систему уравнений, которой подчиняются координаты указанных векторов.

89. Представить вещества $CH_3OH, CO, H_2, CO_2, H_2O$ как векторы в пространстве $\{H, C, O\}$. Доказать, что соответствующие векторы линейно зависимы, и записать две их независимые нулевые нетривиальные линейные комбинации.

90. Пусть $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ — базис системы V, состоящей из векторов пространства $\mathbb{R}^n$, а вектор $\vec{v}$ — некоторый ее элемент. Доказать единственность разложения вектора $\vec{v}$ по базису $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$.

7 Выбор базисных элементов

Понятие ранга и базиса можно определить как для конечных векторных наборов, так и для бесконечных. К первым, например, относятся строки-коэффициенты систем линейных уравнений, ко вторым — все возможные перемещения в плоскости. При работе с конечными векторными множествами чаще всего возникает задача определения базисных элементов и отсеивания зависимых, в то время как бесконечные приводят к вопросу сравнения различных базисов и выбора среди них оптимального.

При обсуждении бесконечных систем мы ограничимся пространствами $\mathbb{R}^n$, в которых присутствует неограниченная свобода в выборе базисов и возникает естественный вопрос об их взаимосвязи. Удобным инструментом здесь оказывается так называемая матрица перехода, реализующая идею замены координат.

Классический пример конечных систем представлен строками и столбцами прямоугольных матриц. Определение базисных элементов и нахождение коэффициентов зависимости, как и нахождение ранга, основывается на элементарных преобразованиях. При этом интересной особенностью становится необходимость использования преобразований над строками для выбора базисных элементов среди столбцов и наоборот. Указанные системы, принадлежащие разным пространствам, на первый взгляд кажутся независимыми. Однако соединение их в матричную структуру приводит к далеко не тривиальному равенству рангов и дает основание для определения ранга матрицы.

Ранг матрицы можно определить и не прибегая к системам строк и столбцов, рассматривая ее прямоугольные блоки. Точнее, число k совпадает с рангом, если: 1) в матрице A можно указать квадратный блок размера $k \times k$, определитель которого отличен от нуля; 2) любой блок большей размерности является вырожденным. Поскольку вычисление определителей всегда является крайне утомительным, то перебирать все миноры (блоки) в поисках ненулевого имеет смысл лишь при малой размерности данной матрицы. При

работе с громоздким таблицами следует обращаться к строкам или столбцам.

7.1 Ранг матрицы

Произвольная матрица A размера $n \times k$ содержит две векторные системы. Строки матрицы $L = \{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n\}$ соответствуют системе векторов пространства $\mathbb{R}^k$, а столбцы матрицы $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_k\}$ образуют систему векторов пространства $\mathbb{R}^n$.

Лемма 7.1. *Ранг системы столбцов произвольной матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

□ Рассмотрим произвольную матрицу $A_{n\times k}$ и ее систему столбцов $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_k\}$ и обозначим через $B_{n\times k}$ матрицу, полученную из A с помощью некоторого преобразования r. Покажем, что столбцы матрицы B образованы координатами тех же векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_k$, но разложенных не в стандартном базисе

$$V = \{\vec{v}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \quad \ldots, \quad \vec{v}_n = (0, 0, \ldots, 0, 0, 1)\},$$

а в некотором видоизмененном базисе W. Для этого выберем один из столбцов матрицы A, обозначив его для простоты буквой $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, и исследуем изменение его координат при элементарных преобразованиях строк.

1. r — перестановка строк с номерами i, j. В этом случае, две координаты c_i и c_j вектора $\vec{c}$ меняются местами и в силу равенства

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + c_i \cdot \vec{v}_i + \ldots + c_j \cdot \vec{v}_j + \ldots + c_n \cdot \vec{v}_n =$$

$$= c_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + c_j \cdot \vec{v}_j + \ldots + c_i \cdot \vec{v}_i + \ldots + c_n \cdot \vec{v}_n$$

преобразование r эквивалентно замене базиса

$$V = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n\} \quad \to \quad W = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n\}.$$

2. r — умножение строки с номером i на ненулевое число c. Здесь воспользуемся равенством

$$c_1\cdot\vec{v}_1+\ldots+c_i\cdot\vec{v}_i+\ldots+c_n\cdot\vec{v}_n = c_1\cdot\vec{v}_1+\ldots+(c\cdot c_i)\cdot\left(\tfrac{1}{c}\cdot\vec{v}_i\right)+\ldots+c_n\cdot\vec{v}_n,$$

которое устанавливает соответствие между преобразованием r и заменой базиса

$$V=\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_i,\ldots,\vec{v}_n\} \quad\to\quad W=\{\vec{v}_1,\ldots,\tfrac{1}{c}\cdot\vec{v}_i,\ldots,\vec{v}_n\}.$$

3. r — замена i-ой строки линейной комбинацией $(i)+c\cdot(j)$. Произведем следующее тождественное преобразование:

$$c_1\cdot\vec{v}_1+\ldots+c_i\cdot\vec{v}_i+\ldots+c_j\cdot\vec{v}_j+\ldots+c_n\cdot\vec{v}_n =$$

$$=c_1\cdot\vec{v}_1+\ldots+(c_i+c\cdot c_j)\cdot\vec{v}_i+\ldots+c_j\cdot(\vec{v}_j-c\cdot v_i)+\ldots+c_n\cdot\vec{v}_n.$$

Из полученного равенства видно, что r эквивалентно замене базиса

$$V=\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_j,\ldots,\vec{v}_n\} \quad\to\quad W=\{\vec{v}_1,\ldots,v_j-c\cdot\vec{v}_i,\ldots,\vec{v}_n\}.$$

Таким образом, преобразование строк матрицы равносильно замене базиса системы столбцов. Другими словами, линейная комбинация некоторых столбцов исходной матрицы A обращается в нуль тогда и только тогда, когда равна нулю линейная комбинация тех же столбцов матрицы B. Следовательно, ранги систем столбцов матриц A и B совпадают. ■

⟲ Рассмотрим матрицу A размера 3×5

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&0&-1\\2&5&7&1&1\\-1&2&1&3&2\end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4&0&-1\\2&5&7&1&1\\-1&2&1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)+(1)]{(2)-2\cdot(1)}\begin{pmatrix}1&3&4&0&-1\\0&-1&-1&1&3\\0&5&5&3&1\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{(3)+5\cdot(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Упростим матрицу, преобразуя координаты столбцов, расположенные над первыми ненулевыми элементами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-(3)]{\frac{1}{8}\cdot(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[-1\cdot(2)]{(1)+3\cdot(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Ранг матрицы B равен 3, базис ее системы столбцов образуют векторы $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_4\}$, при этом два оставшихся столбца раскладываются в следующие линейные комбинации:

$$\vec{c}_3 = \vec{c}_1 + \vec{c}_2, \quad \vec{c}_5 = 2 \cdot \vec{c}_1 - \vec{c}_2 + 2 \cdot \vec{c}_4.$$

Согласно доказанной лемме, те же соотношения выполняются для столбцов исходной матрицы. ⟲

Лемма 7.2. *Ранг системы строк произвольной матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.*

□ Пусть матрица $B_{n\times k}$ получена из матрицы $A_{n\times k}$ с помощью элементарного преобразования r. Обозначим через $L^a = \{\vec{l}_1^a, \vec{l}_2^a, \ldots, \vec{l}_n^a\}$ и $L^b = \{\vec{l}_1^b, \vec{l}_2^b, \ldots, \vec{l}_n^b\}$ системы строк матриц A и B соответственно и покажем, что $rkL^a = rkL^b$.

Если матрицы A и B состоят исключительно из нулей, то лемма в доказательстве не нуждается. В противном случае среди строк матрицы A выберем базис $\{\vec{l}_{i_1}^a, \vec{l}_{i_2}^a, \ldots, \vec{l}_{i_r}^a\}$. Так как каждая строка матрицы A и, как следствие, матрицы B, выражается через базисные элементы, то лемма 6.4 влечет неравенство $rkL^b \leqslant r = rkL^a$.

Так как матрица A может быть получена из матрицы B обратным элементарным преобразованием r^{-1}, то справедливо обратное

неравенство $rkL^a \leqslant rkL^b$. Проанализировав полученные соотношения, получим утверждение леммы. ■

Теорема 7.3. *Ранг системы строк матрицы $A_{n\times k}$ совпадает с рангом системы столбцов и равен числу ненулевых строк матрицы после приведения ее к ступенчатому виду.*

□ В силу лемм 7.1 и 7.2, можно считать матрицу A ступенчатой. Обозначим через $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_r\}$ ненулевые строки матрицы A и докажем равенство $rkL = rkC = r$.

Согласно теореме 6.3, первые строки матрицы $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_r\}$ линейно независимы. Любой набор, в котором количество строк равно $r+1$ (если в матрице присутствуют нулевые строки), содержит хотя бы один нулевой вектор, следовательно, является линейно зависимым. Согласно определению ранга, $rkL = r$.

Пусть $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ri_r}$ — первые ненулевые элементы строк матрицы A. Рассмотрим векторы $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ пространства $\mathbb{R}^k$, составленные из первых r координат столбцов $\vec{c}_{i_1}, \ldots, \vec{c}_{i_r}$. Координатная матрица данных векторов $S_{r\times r}$ имеет ступенчатый вид и не содержит нулевых строк, поэтому ее определитель отличен от нуля. Согласно лемме 6.5, эти векторы образуют базис пространства $\mathbb{R}^k$, а соответствующие им столбцы $\vec{c}_{i_1}, \ldots, \vec{c}_{i_r}$ образуют базис в системе столбцов. Используя лемму 6.4, получим равенство $rkL = r$. ■

Ранг системы строк матрицы, равный рангу системы ее столбцов, называется *рангом матрицы*. На практике он может использоваться при исследовании систем линейных уравнений.

Теорема 7.4. *Система линейных уравнений $Ax = b$ является совместной тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы совпадает с рангом расширенной. При этом система является определенной только в том случае, когда эти ранги совпадают с числом неизвестных.*

□ Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду и воспользуемся теоремой 3.6. Ранги основной и расширенной матриц будут равными тогда и только тогда, когда расширенная матрица не будет содержать строки типа $(0\ 0\ \ldots\ 0 \mid c \neq 0)$, что эквивалентно совместности системы. При этом ранги будут совпадать с количеством неизвестных только в том случае, когда основная матрица системы без учета нулевых строк будет квадратной. Последнее равносильно определенности системы. ■

7.2 Матрица перехода

Рассмотрим теперь пространство $\mathbb{R}^n$ и выберем в нем два базиса $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ и $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$. Тогда каждый вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ будет обладать двумя наборами координат, которые связаны линейными соотношениями.

Определение. Квадратная матрица $C_{A\to B}$ размера $n \times n$, столбцы которой образованы координатами векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ в базисе $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$, называется *матрицей перехода от базиса A к базису B*.

Запись коэффициентов разложения по столбцам обусловлена использованием матрицы перехода при заменах координат, где она выступает в роли связующего звена между координатами одного и того же вектора/точки в различных базисах.

Лемма 7.5. *Для любых базисов A и B пространства $\mathbb{R}^n$ соответствующая матрица перехода $C_{A\to B}$ является невырожденной, при этом $\left(C_{A\to B}\right)^{-1} = C_{B\to A}$. При разложении вектора $\vec{v}$ в указанных базисах*

$$\vec{v} = v_1^a \cdot \vec{a}_1 + v_2^a \cdot \vec{a}_2 + \ldots + v_n^a \cdot \vec{a}_n = v_1^b \cdot \vec{b}_1 + v_2^b \cdot \vec{b}_2 + \ldots + v_n^b \cdot \vec{b}_n$$

соответствующие координаты связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} v_1^a \\ \vdots \\ v_n^a \end{pmatrix} = C_{A\to B} \cdot \begin{pmatrix} v_1^b \\ \vdots \\ v_n^b \end{pmatrix}.$$

□ Разложим произвольный вектор $\vec{v}$ по базису B

$$\vec{v} = v_1^b \cdot \vec{b}_1 + v_2^b \cdot \vec{b}_2 + \ldots + v_n^b \cdot \vec{b}_n = \sum_{k=1}^{n} v_k^b \cdot \vec{b}_k$$

и воспользуемся определением матрицы перехода $C_{A\to B}$:

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k^b \cdot \sum_{i=1}^{n} c_{ik} \cdot \vec{a}_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v_k^b \cdot c_{ik} \cdot \vec{a}_i.$$

В последнем выражении изменим порядок суммирования и сгруппируем слагаемые относительно базисных векторов:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_k^b \cdot c_{ik} \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \cdot \sum_{k=1}^{n} v_k^b \cdot c_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik} \cdot v_k^b \right) \cdot \vec{a}_i.$$

Последнее равенство представляет собой разложение вектора $\vec{v}$ в базисе A, поэтому, в силу единственности такого разложения,

$$v_1^a = \sum_{k=1}^{n} c_{1k} \cdot v_k^b, \quad v_2^a = \sum_{k=1}^{n} c_{2k} \cdot v_k^b, \ \ldots,$$

$$v_n^a = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} \cdot v_k^b \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} v_1^a \\ \vdots \\ v_n^a \end{pmatrix} = C_{A\to B} \cdot \begin{pmatrix} v_1^b \\ \vdots \\ v_n^b \end{pmatrix}.$$

Докажем утверждение леммы о невырожденности матрицы перехода. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{v}$ и дважды применим к

нему доказанную формулу:

$$\begin{pmatrix} v_1^a \\ \vdots \\ v_n^a \end{pmatrix} = C_{A\to B}\cdot\begin{pmatrix} v_1^b \\ \vdots \\ v_n^b \end{pmatrix} = C_{A\to B}\cdot C_{B\to A}\cdot\begin{pmatrix} v_1^a \\ \vdots \\ v_n^a \end{pmatrix}.$$

Поставим последовательно вместо $\vec{v}$ векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$, учитывая, что их координаты в базисе A образуют единичную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_{A\to B}\cdot C_{B\to A}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_{A\to B}\cdot C_{B\to A}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Полученные равенства в матричном виде эквивалентны условию $C_{A\to B}\cdot C_{B\to A} = E$, которое говорит о невырожденности матриц перехода и устанавливает соотношение $\left(C_{A\to B}\right)^{-1} = C_{B\to A}$. ■

⟳ Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ две системы векторов

$$A = \{\vec{a}_1 = (2,-3),\ \vec{a}_2 = (1,1)\} \quad \text{и} \quad B = \{\vec{b}_1 = (5,-5),\ \vec{b}_2 = (6,1)\}.$$

Каждая из этих систем образует на плоскости базис, так как

$$detS_A = det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0, \quad detS_B = det\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = 35 \neq 0.$$

Проверкой легко убедиться, что векторы системы B раскладываются по базису A со следующими коэффициентами:

$$\vec{b}_1 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_1 + 4\vec{a}_2.$$

Следовательно, матрица перехода $C_{A\to B}$ имеет вид

$$C_{A\to B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определим вектор $\vec{v}$ с помощью координат в базисе B:

$$\vec{v} = -3 \cdot \vec{b}_1 + 2 \cdot \vec{b}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Тогда координаты вектора $\vec{v}$ в базисе A могут быть найдены по формуле

$$\begin{pmatrix} v_1^a \\ v_2^a \end{pmatrix} = C_{A \to B} \cdot \begin{pmatrix} v_1^b \\ v_2^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место соотношение

$$\vec{v} = v_1^a \cdot \vec{a}_1 + v_2^a \cdot \vec{a}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \ \circlearrowleft$$

7.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Найти матрицу перехода $C_{a \to b}$ для данных систем векторов:

$$A = \{\vec{a}_1 = (3,5),\ \vec{a}_2 = (1,2)\} \ \text{ и } \ B = \{\vec{b}_1 = (1,1),\ \vec{b}_2 = (3,2)\}.$$

Решение. Для того чтобы составить матрицу перехода $C_{a \to b}$, необходимо найти координаты векторов системы B в базисе A. Рассмотрим первый вектор $\vec{b}_1$ и разложим его по базису $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$:

$$\vec{b}_1 = x \cdot \vec{a}_1 + y \cdot \vec{a}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (1,1) = x \cdot (3,5) + y \cdot (1,2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Произведем аналогичные вычисления для вектора $\vec{b}_2$:

$$\vec{b}_2 = x \cdot \vec{a}_1 + y \cdot \vec{a}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (3,2) = x \cdot (3,5) + y \cdot (1,2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 5x + 2y = 2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -9. \end{array} \right.$$

Распределив полученные координаты по столбцам, найдем матрицу перехода:

$$\vec{b}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 - 2 \cdot \vec{a}_2, \;\; \vec{b}_2 = 4 \cdot \vec{a}_1 - 9 \cdot \vec{a}_2 \quad \Rightarrow \quad C_{a \to b} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C_{a \to b} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найти матрицу перехода $C_{a \to b}$ для данных систем векторов в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\{\vec{a}_1 = (1,-2,3),\ \vec{a}_2 = (2,-5,11),\ \vec{a}_3 = (3,-6,10)\} \text{ и}$$

$$\{\vec{b}_1 = (1,2,-1),\ \vec{b}_2 = (2,5,2),\ \vec{b}_3 = (-3,-6,4)\}.$$

Решение. Для нахождения матрицы перехода $C_{a \to b}$ можно обратиться к определению и вычислить координаты векторов системы B в базисе A. Тогда придется решать три системы линейных уравнений с тремя неизвестными, что представляется достаточно утомительным. Мы воспользуемся альтернативным методом, задействующим стандартный базис

$$E = \{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\}.$$

Переход $A \to B$ можно выполнить в два этапа $A \to E \to B$, что на матричном уровне выражается в виде равенства

$$\vec{v}_a = C_{a \to e} \cdot \vec{v}_e = C_{a \to e} \cdot \left(C_{e \to b} \cdot \vec{v}_b \right) =$$

$$= \Big(C_{a\to e}\cdot C_{e\to b}\Big)\cdot \vec{v}_b \quad \Leftrightarrow \quad C_{a\to b} = C_{a\to e}\cdot C_{e\to b}.$$

Матрицы $C_{a\to e}$ и $C_{e\to a}$ осуществляют взаимно обратные переходы, поэтому они связаны соотношением $\big(C_{a\to e}\big) = \big(C_{e\to a}\big)^{-1}$. Учитывая последние два равенства, находим:

$$C_{a\to b} = C_{a\to e}\cdot C_{e\to b} = \big(C_{e\to a}\big)^{-1}\cdot C_{e\to b}.$$

Матрицы перехода от стандартного базиса к системам A и B не требуют никаких вычислений, так как их столбцы образованы координатами данных векторов:

$$C_{e\to a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & -6 \\ 3 & 11 & 10 \end{pmatrix}, \quad C_{e\to b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению обратной матрицы и решается, например, с помощью алгебраических дополнений:

$$C_{a\to b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & -6 \\ 3 & 11 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -16 & -13 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & -103 & 114 \\ -4 & -9 & 12 \\ 16 & 41 & -47 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C_{a\to b} = \begin{pmatrix} -39 & -103 & 114 \\ -4 & -9 & 12 \\ 16 & 41 & -47 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Разложить вектор $\vec{v} = (9, 0, -18)$ по базису

$$A = \{\vec{a}_1 = (2, 2, -1),\ \vec{a}_2 = (-1, 2, 2),\ \vec{a}_3 = (2, -1, 2)\}.$$

Решение. Согласно лемме 7.5, искомые координаты могут быть найдены по формуле $\vec{v}_a = C_{a\to e}\cdot\vec{v}_e$, где e — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^3$. Матрица перехода $C_{a\to e}$ является обратной к $C_{e\to a}$, поэтому

$$C_{a\to e} = \big(C_{e\to a}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Подставив найденную матрицу в первую формулу, найдем

$$\vec{v}_a = C_{a\to e}\cdot\vec{v}_e = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(9,0,-18) = 4\cdot(2,2,-1) - 5\cdot(-1,2,2) - 2\cdot(2,-1,2)$.

Пример 4. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \\ 5 & -8 & 23 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу A к ступенчатому виду:

$$A \xrightarrow[(4)-5\cdot(1)]{(2)-(1),\ (3)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-2\cdot(2)]{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как ступенчатый вид матрицы содержит три ненулевые строки, ранг исходной матрицы равен трем.

Ответ: $rk\ A = 3$.

Пример 5. Для данной матрицы A указать базисы системы строк и системы столбцов, а также выразить остальные строки(столбцы) через базисные:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 12 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & -8 & 7 & -11 \end{pmatrix}.$$

Решение. Введем следующие обозначения для системы строк и столбцов матрицы A:

$$L = \{\vec{l}_1,\ \vec{l}_2,\ \vec{l}_3,\ \vec{l}_4\}, \quad C = \{\vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \vec{c}_3,\ \vec{c}_4\}.$$

Приведем данную матрицу к ступенчатому виду, записав последовательность элементарных преобразований с помощью единичной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -9 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & 7 & -11 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)+4\cdot(1)]{(2)-3\cdot(1),(3)+2\cdot(1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(4)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ступенчатый вид матрицы A содержит две нулевые строки, а в соседней матрице записаны коэффициенты соответствующих нулевых комбинаций:

$$-2\cdot\vec{l}_1+1\cdot\vec{l}_3-1\cdot\vec{l}_4=\vec{0},\quad -3\cdot\vec{l}_1+1\cdot\vec{l}_2=\vec{0}.$$

Поэтому в качестве базисных строк мы можем выбрать $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_3$, а оставшиеся $\vec{l}_2$ и $\vec{l}_4$ выразить через них с помощью полученных комбинаций:

$$\left\{\begin{array}{l} -3\cdot\vec{l}_1+1\cdot\vec{l}_2=\vec{0} \\ -2\cdot\vec{l}_1+1\cdot\vec{l}_3-1\cdot\vec{l}_4=\vec{0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{l}_2=3\cdot\vec{l}_1 \\ \vec{l}_4=-2\cdot\vec{l}_1+\vec{l}_3. \end{array}\right.$$

Теперь обратимся к системе столбцов преобразованной матрицы. Второй столбец пропорционален первому и представляется в виде $\vec{c}_2=2\cdot\vec{c}_1$. Четвертый вектор раскладывается по первому и третьему:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-3y=4 \\ -5y=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1 \\ y=-1. \end{array}\right.$$

Таким образом, векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_3$ можно выбрать в качестве базисных для системы столбцов, а оставшиеся $\vec{c}_2$ и $\vec{c}_4$ имеют в этом базисе координаты $(2,0)$ и $(1,-1)$ соответственно.

Ответ: базис системы строк образуют векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_3$, при этом $\vec{l}_2=3\vec{l}_1, \vec{l}_4=-2\vec{l}_1+\vec{l}_3$;
базис системы столбцов образуют векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_3$, при этом $\vec{c}_2=2\vec{l}_1, \vec{c}_4=\vec{c}_1-\vec{c}_3$.

Пример 6. Найти ранг матрицы с помощью определителей:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку матрица ненулевая, то ее ранг не меньше единицы. Учитывая тот факт, что ранг не может превышать количества строк/столбцов, мы можем заключить его в следующие границы:

$$1 \leqslant rk\ A \leqslant 3.$$

Теперь проверим, может ли ранг быть равен 2, последовательно перебирая блоки 2-го порядка. Выберем квадрат размера 2×2, расположенный в правом верхнем углу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 \neq 0.$$

Первая же наша попытка увенчалась успехом, следовательно, ранг не меньше 2 и мы можем переходить к блокам третьего порядка. В данной матрице можно выделить 4 квадрата размера 3×3 (вычеркивая любой из столбцов). При этом каждый из них оказывается вырожденным:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, ранг матрицы равен 2.

Ответ: $rk\ A = 2$.

Пример 7. Используя понятие ранга матрицы, определить тип системы линейных уравнений (совместная, определенная или неопределенная):

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 3y - 2z = 5 \\ x + 7y + 8z = 7. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную и расширенную матрицы коэффици-

ентов

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & 7 \end{array}\right)$$

и сравним их ранги. Вычислим определитель основной матрицы, использовав разложение по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $detA = 0$, ранг основной матрицы строго меньше трех. Теперь рассмотрим квадратный блок расширенной матрицы, составленный из последних трех столбцов, и найдем его определитель с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[(3)+7\cdot(1)]{(2)-3\cdot(1)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 15 & 28 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 80.$$

Поскольку этот определитель отличен от нуля, то ранг расширенной матрицы не меньше трех. Таким образом, ранги указанных матриц не совпадают, следовательно, система является несовместной.

Ответ: система уравнений является несовместной.

Задачи для самостоятельной работы

91. Найти ранги матриц, используя элементарные преобразования:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

92. Найти ранги данных выше матриц, используя определители.

93. Найти базисы для систем строк и систем столбцов следующих матриц и указать координаты всех строк и столбцов в найденных базисах:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

94. Найти все максимальные линейно независимые подсистемы данного набора векторов:

$$\vec{a}_1 = (4, -1, 3, -2),\ \vec{a}_2 = (3, -1, 4, -2),$$

$$\vec{a}_3 = (8, -2, 6, -4),\ \vec{a}_4 = (6, -2, 8, -4).$$

95. Найти значения параметра λ, при которых вектор $\vec{b}$ выражается через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$\vec{a}_1 = (3, 4, 2),\ \vec{a}_1 = (6, 8, 7),\ \vec{b} = (9, 12, \lambda).$$

96. Найти один из возможных базисов для данной системы векторов и определить координаты всех оставшихся векторов в этом базисе:

$\vec{a}_1 = (5, 2, -3, 1)$, $\vec{a}_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{a}_4 = (3, 4, -1, 2)$.

97. Найти ранги матриц при различных значениях параметра λ:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

98. Доказать, что каждая из заданных систем векторов образует базис, и найти матрицу перехода от системы S к системе S', если

а) $S = \{(1,2,1),(2,3,3),(3,8,2)\}$,
$S' = \{(3,5,8),(5,14,13),(1,9,2)\}$;

б) $S = \{(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,3,2,3)\}$,
$S' = \{(1,0,3,3),(-2,-3,-5,-4),(2,2,5,4),(-2,-3,-4,-4)\}$.

99. Базис $S' = \{e'_1, e'_2\}$ получен из стандартного $S = \{e_1, e_2\}$ поворотом на угол α. Найти матрицу перехода от S к S'.

100. Базис плоскости $S' = \{e'_1, e'_2\}$ получен из стандартного базиса $S = \{e_1, e_2\}$ отражением относительно прямой $y = -x$. Найти матрицу перехода от S к S'.

101. Базис пространства $S' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ получен из стандартного базиса $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ отражением относительно начала координат. Найти матрицу перехода от S к S'.

102. Доказать, что ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.

103. Доказать, что умножение на невырожденную матрицу сохраняет значение ранга.

104. Выяснить, образуют ли строки каждой из матриц

а) $\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Глава II
Аналитическая геометрия

8 Векторная алгебра

Аналитическая геометрия является синтезом мощного алгебраического аппарата и тонкой геометрической идеи. Первая составляющая обеспечивает высокую производительность в расчетах, предоставляя алгоритмы быстрого решения стандартных задач, вторая — выделяет структурные особенности и привносит легкость в рутинные расчеты. Алгебраические методы практически всегда подчиняются четкой структуре и легко формализуются, вследствие чего представляются предельно доступными и ясными для восприятия. Геометрические же идеи всегда уникальны, не поддаются строгому описанию и максимально приближены к творчеству.

В дальнейшем изложении внимание читателя в основном привлечено к алгебраической компоненте, в то время как геометрические подходы встречаются в виде вкраплений. Представленные ниже методы аналитической геометрии направлены в основном на описание геометрических объектов — прямых, плоскостей, линий и поверхностей — с помощью уравнений; и на решение геометрических задач — нахождение расстояний углов, площадей и объемов —

алгебраическими способами. К последним прежде всего относятся векторное исчисление и метод координат, которые кратко обсуждаются в текущем разделе и детально разбираются в последующих.

Системой координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется система, состоящая из фиксированной точки O, определяющей *начало координат*, и набора базисных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Координаты произвольного вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ образуют коэффициенты разложения по базису

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + v_n \cdot \vec{e}_n,$$

а координаты произвольной точки M составлены из коэффициентов разложения ее *радиус-вектора* OM:

$$M = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \vec{e}_n.$$

Каждая пара точек A и B определяет идущий из начала A в конец B вектор $\overrightarrow{AB}$, координаты которого вычисляются следующим образом:

$$A = (a_1, a_2, \ldots a_n), \quad B = (b_1, b_2, \ldots b_n) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (b_n - a_n, b_2 - a_2, \ldots b_n - a_n).$$

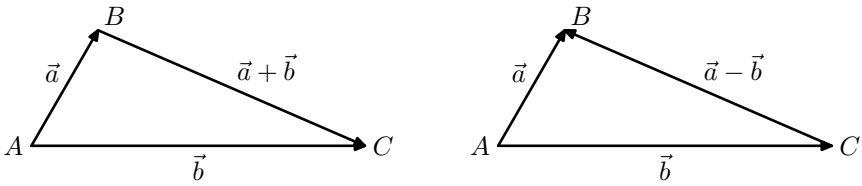


Рис. 2.

Согласно данному равенству, сложение и вычитание векторов подчиняется *правило треугольника* (см. рисунок 2):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

В качестве примера векторной арифметики рассмотрим задачу о делении отрезка в заданном отношении λ. Рассмотрим произвольные точки A и B и выберем на отрезке AB точку C так, что $AC : BC = \lambda$.

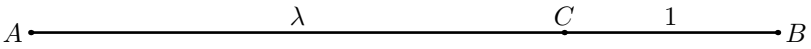


Рис. 3.

Считая координаты точек A и B известными, вычислим координаты промежуточной точки C. В силу векторного равенства $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$ имеем:

$$(C-A) = \lambda\cdot(B-C) \;\Leftrightarrow\; (1+\lambda)\cdot C = A+\lambda\cdot B \;\Leftrightarrow\; C = \tfrac{1}{\lambda+1}\cdot A+\tfrac{\lambda}{\lambda+1}\cdot B.$$

Используя полученное соотношение, вычислим координаты центра тяжести треугольника H (точки пересечения медиан), предполагая известными координаты его вершин P, Q, R.

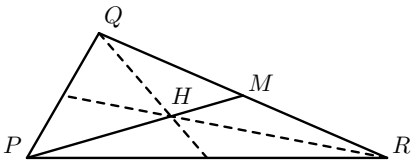


Рис. 4.

Пусть M — середина отрезка QR, тогда по теореме о пересечении медиан треугольника $PH : MH = 2 : 1$. Следовательно,

$$H = \frac{1}{3}\cdot P + \frac{2}{3}M = \frac{1}{3}\cdot P + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot Q + \frac{1}{2}R\right) = \frac{P+Q+R}{3}.$$

8.1 Скалярное произведение векторов

Основой большинства алгебраических методов вычисления углов и расстояний служит *скалярное произведение* векторов. Результатом этой операции является число (скаляр), которое для данной пары векторов $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ определяется как сумма

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots v_n \cdot w_n.$$

Если рассматривать координаты векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$ как элементы матриц V и W размера $1 \times n$, то скалярное произведение можно вычислить, используя матричное произведение:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = (v_1\ v_2\ \ldots\ v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = V \cdot W^T.$$

Согласно определению, скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- *симметрии*, $(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$;
- *линейности по каждом аргументу*,

$$(\lambda \cdot \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \lambda \cdot \vec{w}) = \lambda \cdot (\vec{v}, \vec{w}), \quad (\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}) =$$

$$= (\vec{v}_1, \vec{w}) + (\vec{v}_2, \vec{w}), \quad (\vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2) = (\vec{v}, \vec{w}_1) + (\vec{v}, \vec{w}_2);$$

- *положительной определенности*, для любого вектора $\vec{v}$ его скалярный квадрат есть величина неотрицательная

$$(\vec{v}, \vec{v}) = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \geqslant 0,$$

при этом равенство $(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ возможно лишь в случае, $\vec{v} = \vec{0}$.

Последнее свойство позволяет определить величину

$$\sqrt{(\vec{v}, \vec{v})} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2},$$

которая называется *модулем* вектора $\vec{v}$ и может обозначаться двумя способами: $|\vec{v}|$ или $\|\vec{v}\|$.

$\circlearrowleft$ Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и найдем связь между длинами его сторон и диагоналей.

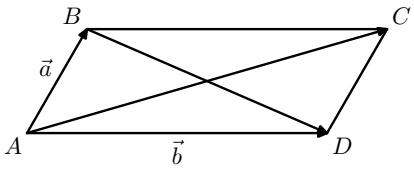


Рис. 5.

Используя правило треугольника, выразим диагонали квадрата

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}$$

и вычислим сумму квадратов их длин:

$$AC^2 + BD^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}) =$$

$$= \Big[(\vec{a}, \vec{a}) + 2 \cdot (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b})\Big] + \Big[(\vec{b}, \vec{b}) - 2 \cdot (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{a})\Big] =$$

$$= 2 \cdot (\vec{a}, \vec{a}) + 2 \cdot (\vec{b}, \vec{b}) = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Таким образом, *сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.* $\circlearrowright$

Понятие угла на плоскости $\mathbb{R}^2$ или в пространстве $\mathbb{R}^3$ представляется геометрически очевидным и не требует отдельного определения. Для пространств $\mathbb{R}^n$ высших размерностей осязаемость этого понятия пропадает и требует аккуратного описания.

Лемма 8.1. *Для любых векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$ пространства $\mathbb{R}^n$ выполняется неравенство Коши-Буняковского: $|(\vec{v}, \vec{w})| \leqslant |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$. Равенство $|(\vec{v}, \vec{w})| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ возможно лишь в том случае, когда векторы $\vec{v}$ и $\vec{w}$ линейно зависимы.*

$\square$ Если один из векторов является нулевым, тогда утверждение леммы в доказательстве не нуждается, поэтому рассмотрим случай $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$. Зафиксируем произвольное число x и рассмотрим скалярный квадрат вектора $\vec{v} + x \cdot \vec{w}$:

$$(\vec{v} + x \cdot \vec{w}, \vec{v} + x \cdot \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{v}) + 2x \cdot (\vec{v}, \vec{w}) + x^2 \cdot (\vec{w}, \vec{w}).$$

В силу условия $\vec{w} \neq \vec{0}$ выражение

$$ax^2 + 2bx + c, \quad \text{где} \quad a = (\vec{w}, \vec{w}), \quad b = (\vec{v}, \vec{w}), \quad c = (\vec{v}, \vec{v})$$

является квадратным трехчленом, так как его старший коэффициент отличен от нуля. Согласно свойству неотрицательной определенности скалярного произведения, это выражение неотрицательно для любого значения переменной x. Следовательно, его дискриминант неположителен:

$$D = 4b^2 - 4ac \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 \leqslant ac \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{v}, \vec{w})^2 \leqslant (\vec{w}, \vec{w}) \cdot (\vec{v}, \vec{v}).$$

Извлекая корень из обеих частей неравенства, получаем первое утверждение леммы. Равенство $|(\vec{v}, \vec{w})| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ говорит о том, что дискриминант указанного трехчлена обращается в ноль. Следовательно, уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{v} + x \cdot \vec{w}, \vec{v} + x \cdot \vec{w}) = 0$$

имеет некоторый корень x_0. Скалярный квадрат вектора $\vec{v} + x_0 \cdot \vec{w}$, соответствующего данному корню, равен нулю. Согласно свойству неотрицательной определенности, сам вектор $\vec{v} + x_0 \cdot \vec{w}$ также является нулевым, что равносильно линейной зависимости исходных векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$. ■

Это утверждение позволяет определить угол между ненулевыми векторами, лежащими в пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности. На плоскости $\mathbb{R}^2$ связь между углом $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ и скалярным произведением выражается теоремой косинусов:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$$

$$(\vec{a}, \vec{a}) - 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

По теореме Коши-Буняковского правая часть полученного равенства лежит в пределах $[-1, 1]$ для любых ненулевых векторов пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Углом между ненулевыми векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пространства $\mathbb{R}^n$, называется величина $\varphi \in [0, \pi]$, определяемая из равенства $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. В частности, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимноортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

$\circlearrowleft$ Рассмотрим куб $AB \ldots C_1D_1$ и вычислим угол между его диагоналями AC_1 и B_1D. Для этого введем систему координат с началом в точке B и координатными осями, параллельными ребрам BA, BC и BB_1 соответственно.

Обозначим через a длину ребра и найдем координаты концов диагоналей:

$$A(a, 0, 0),\ \ C_1(0, a, a),\ \ D(a, a, 0),\ \ B_1(0, 0, a).$$

Далее определим координаты направляющих векторов

$$\vec{AC_1} = (-a, a, a) \ \text{ и } \ \vec{DB_1} = (-a, -a, a)$$

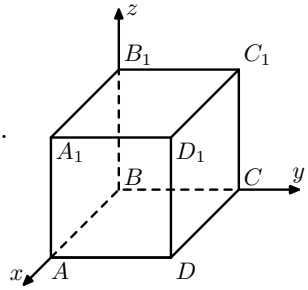


Рис. 6.

и вычислим угол между ними:

$$\cos\angle(AC_1, DB_1) = \frac{(AC_1, DB_1)}{|AC_1| \cdot |DB_1|} =$$

$$= \frac{-a \cdot (-a) + a \cdot (-a) + a \cdot a}{\sqrt{(-a)^2 + a^2 + a^2} \cdot \sqrt{(-a)^2 + (-a)^2 + a^2}} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\angle(AC_1, DB_1) = \arccos\frac{1}{3}$. $\circlearrowright$

8.2 Векторное и смешанное произведение

Векторная алгебра позволяет быстро вычислять площади треугольников и объемы тетраэдров с помощью специальных операций векторного и смешанного произведения. К ним же сводится нахождение площадей многоугольников и объемов многогранников.

Рассмотрим пару линейно независимых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ и ортогональный им ненулевой вектор $\vec{n}$.

Лемма 8.2. *Тройка* $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{n}\}$ *образует базис пространства* $\mathbb{R}^3$.

□ Так как базис пространства R^3 не может содержать более трех векторов, достаточно проверить линейную независимость векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{n}$. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$c_1 \cdot \vec{a} + c_2 \cdot \vec{b} + c_3 \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

и докажем, что все ее коэффициенты равны нулю. Умножим указанную комбинацию скалярно на вектор $\vec{n}$:

$$(c_1 \cdot \vec{a} + c_2 \cdot \vec{b} + c_3 \cdot \vec{n}, \vec{n}) = (\vec{0}, \vec{n}) \quad \Rightarrow \quad c_1 \cdot (\vec{a}, \vec{n}) + c_2 \cdot (\vec{b}, \vec{n}) + c_3 \cdot (\vec{n}, \vec{n}) = 0.$$

Так как вектор $\vec{n}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, первые два слагаемых равны нулю:

$$c_1 \cdot (\vec{a}, \vec{n}) + c_2 \cdot (\vec{b}, \vec{n}) + c_3 \cdot (\vec{n}, \vec{n}) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 \cdot (\vec{n}, \vec{n}) = 0.$$

Согласно предположению, вектор $\vec{n}$ является ненулевым, поэтому полученное равенство эквивалентно условию $c_3 = 0$. Следовательно, исходная нулевая линейная комбинация содержит только два слагаемых:

$$c_1 \cdot \vec{a} + c_2 \cdot \vec{b} = \vec{0}.$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коэффициенты c_1 и c_2 должны быть нулевыми. Таким образом, все коэффициенты нулевой комбинации равны нулю, что доказывает линейную независимость векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{n}$. ■

Считая координаты векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ известными, найдем координаты вектора $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Требование ортогональности приводит к системе линейных уравнений относительно переменных n_1, n_2, n_3:

$$\begin{cases} (\vec{a}, \vec{n}) = 0, \\ (\vec{b}, \vec{n}) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2 + a_3 \cdot n_3 = 0, & (1) \\ b_1 \cdot n_1 + b_2 \cdot n_2 + b_3 \cdot n_3 = 0. & (2) \end{cases}$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ основная матрица имеет ранг 2, поэтому система содержит одну свободную переменную. Последовательно исключим из системы переменные n_1, n_2, n_3 и выпишем общее решение системы:

$$\begin{cases} (\vec{a}, \vec{n}) = 0, \\ (\vec{b}, \vec{n}) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (1) - a_1 \cdot (2), \\ b_2 \cdot (1) - a_2 \cdot (2), \\ b_3 \cdot (1) - a_3 \cdot (2); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \cdot n_2 + (b_1 a_3 - b_3 a_1) \cdot n_3 = 0, \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot n_1 + (b_2 a_3 - b_3 a_2) \cdot n_3 = 0, \\ (a_1 b_3 - b_1 a_3) \cdot n_1 + (a_2 b_3 - b_2 a_3) \cdot n_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b_1 a_3 - b_3 a_1) \cdot n_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot n_2, \\ (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot n_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot n_1, \\ (a_2 b_3 - b_2 a_3) \cdot n_2 = (b_1 a_3 - a_1 b_3) \cdot n_1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{n} = \lambda \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, b_1 a_3 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Полученное решение допускает следующую геометрическую интерпретацию: множество искомых векторов $\vec{n}$ заполняют прямую $l^{\perp}$, ортогональную плоскости $< \vec{a}, \vec{b} >$; при этом вектор

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2, b_1 a_3 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

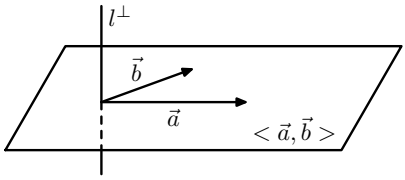


Рис. 7.

определяет направление указанной прямой, а коэффициент пропорциональности λ отвечает за длину найденного вектора n.

Определение. *Векторным произведением* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{a}\times\vec{b}$, координаты которого определяются равенством

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Векторное произведение $[\vec{a},\vec{b}]$ может быть вычислено с помощью специального определителя. Первая строчка этого определителя составлена из базисных векторов $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$, а вторая и третья образованы координатами векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. При вычислении определителя используется разложение по первой строке:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1\cdot(a_2b_3-a_3b_2)+\vec{e}_2\cdot(b_1a_3-a_1b_3)+\vec{e}_3\cdot(a_1b_2-a_2b_1).$$

Перечислим свойства векторного произведения, которые следуют из определения и свойств определителей:

- *антисимметрия*, $[\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{w},\vec{v}]$;
- *линейность по каждому аргументу*,

$$[\lambda\cdot\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\lambda\cdot\vec{w}] = \lambda\cdot[\vec{v},\vec{w}],$$

$$[\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{w}] = [\vec{v}_1,\vec{w}]+[\vec{v}_2,\vec{w}], [\vec{v},\vec{w}_1+\vec{w}_2] = [\vec{v},\vec{w}_1]+[\vec{v},\vec{w}_2];$$

- *ортогональность*, $(\vec{v},[\vec{v},\vec{w}]) = (\vec{w},[\vec{v},\vec{w}]) = 0$.

Лемма 8.3. *Модуль векторного произведения* $[\vec{v},\vec{w}]$ *равен площади параллелограмма, построенного на* $\vec{v}$ *и* $\vec{w}$.

□ Обозначим через α угол между векторами $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ и $\vec{w} = (w_1,w_2,w_3)$, тогда площадь параллелограмма может быть найдена по формуле $S = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\sin\alpha$. Так как угол между векторами лежит

в пределах $[0, \pi]$, то $\sin\alpha$ есть величина неотрицательная. Согласно основному тригонометрическому свойству, имеем:

$$S = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\sin\alpha = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\sqrt{1-\left(\frac{(\vec{v},\vec{w})}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(v_1^2+v_2^2+v_3^2)\cdot(w_1^2+w_2^2+w_3^2)-(v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2+v_3\cdot w_3)^2} =$$

$$= \sqrt{(v_1\cdot w_2-v_2\cdot w_1)^2+(v_1\cdot w_3-v_3\cdot w_1)^2+(v_2\cdot w_3-v_3\cdot w_2)^2}. \blacksquare$$

$\circlearrowleft$ Рассмотрим векторы $\vec{v}=(3,-1,4)$ и $\vec{w}=(2,1,-1)$ и вычислим площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{v}$ и $\vec{w}$. Для этого найдем векторное произведение

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1\cdot(-1\cdot(-1)-1\cdot 4)+\vec{e}_2\cdot(4\cdot 2-3\cdot(-1))+$$

$$+\vec{e}_3\cdot(3\cdot 1-(-1)\cdot 2) = -3\vec{e}_1+11\vec{e}_2+5\vec{e}_3 = (-3,11,5)$$

и определим его длину:

$$S = |\vec{v}\times\vec{w}| = \sqrt{(-3)^2+11^2+5^2} = \sqrt{155}. \circlearrowright$$

Три вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$, лежащие в пространстве $\mathbb{R}^3$, определяют параллелепипед (см. рисунок 8). Рассмотрим вопрос о том, как находить его объем по известным координатам тройки $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$. Объем параллелепипеда V можно представить как произведение площади основания на его высоту $S\cdot H$. Если основанием считать параллелограмм, построенный на векторах $\vec{u}$ и $\vec{v}$, то его площадь S равна модулю векторного произведения $|\vec{u}\times\vec{v}|$. Поэтому для нахождения объема достаточно определить длину перпендикуляра, опущенного из конца вектора $\vec{w}$ на плоскость $<\vec{u},\vec{v}>$.

Обозначим буквой $\vec{n}$ единичный вектор, ортогональный плоскости $<\vec{u},\vec{v}>$, и рассмотрим разложение вектора $\vec{w}$ по базису $\{\vec{u},\vec{v},\vec{n}\}$:

$$\vec{w} = \alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}+\gamma\cdot\vec{n}.$$

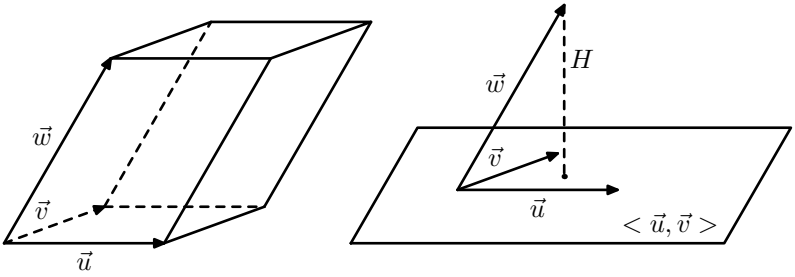


Рис. 8.

Искомая высота равна абсолютной величине коэффициента γ и в силу нормированности вектора $\vec{n}$ совпадает с величиной

$$H = |\gamma| = |\gamma \cdot \vec{n}| = |\vec{w} - \alpha \cdot \vec{u} - \beta \cdot \vec{v}|.$$

Так как векторы $\vec{n}$ и $\vec{u} \times \vec{v}$ коллинеарны,

$$|(\vec{u} \times \vec{v}, \gamma \cdot \vec{n})| = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\gamma \cdot \vec{n}|,$$

поэтому объем параллелепипеда может быть найден по следующей формуле:

$$V = S \cdot H = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\gamma \cdot \vec{n}| = |(\vec{u} \times \vec{v}, \gamma \cdot \vec{n})| = |(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} - \alpha \cdot \vec{u} - \beta \cdot \vec{v})| =$$
$$= |(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) - \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}) - \beta \cdot (\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v})| = |(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})|. \qquad (1)$$

Определение. *Смешанным произведением векторов* $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ пространства $\mathbb{R}^3$, называется число $(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$.

Смешанное произведение векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ совпадает с определителем их координатной матрицы:

$$(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot w_1 + (v_1 u_3 - u_1 v_3) \cdot w_2 + (u_1 v_2 - v_2 b_1) \cdot w_3 =$$
$$= w_1 \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Из формулы (1) следует, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$, равен его абсолютной величине. В заключение также отметим, что формулы для площади треугольника и объема тетраэдра представляются в следующем виде:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|[u,v]|, \quad V_\Delta = \frac{1}{6}|(u,v,w)|.$$

8.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Пусть A, B, C, D — произвольные точки в пространстве. Вычислить сумму

$$S = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right). \tag{2}$$

Решение. Представим векторы, определяющие сумму S, в виде комбинации $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}, \ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

Подставим эти равенства в выражение (2) и воспользуемся свойством линейности скалярного произведения:

$$S = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) =$$

$$= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) -$$

$$- \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = 0.$$

Ответ: $S = 0$.

Пример 2. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка пространства. Доказать, что

$$OM^2 = \frac{1}{3}\Big(OA^2 + OB^2 + OC^2\Big) - \frac{1}{9}\Big(AB^2 + BC^2 + AC^2\Big).$$

Решение. Как было показано выше, для центра тяжести M треугольника ABC выполняется равенство

$$M = \frac{1}{3}\Big(A + B + C\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Следовательно, квадрат длины его радиус-вектора может быть вычислен следующим образом:

$$\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\right)^2 = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}(OA^2+OB^2+OC^2)+\frac{2}{9}\left(\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)\right).$$

Представим векторы, содержащие стороны треугольника, в виде

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

и найдем сумму квадратов их длин:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2(OA^2 + OB^2 + OC^2) -$$

$$-2\left(\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)\right).$$

Теперь выразим сумму скалярных произведение $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ через длины и подставим в формулу для OM^2:

$$\left(\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)\right) = OA^2 + OB^2 + OC^2 -$$

$$-\frac{1}{2}(AB^2+AC^2+BC^2) \;\Rightarrow\; OM^2=\frac{1}{9}(OA^2+OB^2+OC^2)+$$
$$+\frac{2}{9}\Big(OA^2+OB^2+OC^2-\frac{1}{2}(AB^2+AC^2+BC^2)\Big).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим требуемое равенство.

Пример 3. Высота AA_1 прямоугольного параллелепипеда $A\ldots D_1$ вдвое больше каждой из сторон основания. Найти угол между прямыми BD_1 и AM, где M — точка пересечения CD_1 и C_1D.

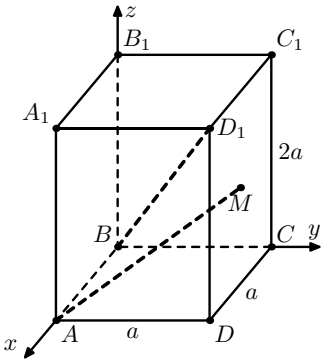


Рис. 9.

Решение. Введем систему координат, расположив ее начало в точке B и направив оси Ox, Oy и Oz вдоль прямых BA, BC и BB_1 соответственно. Найдем координаты концов указанных в условии отрезков

$$B=(0,0,0),\quad D_1=(a,a,2a),\quad A=(a,0,0),\quad M=(a/2,a,a)$$

и соответствующих векторов

$$\overrightarrow{BD_1}=(a,a,2a),\quad \overrightarrow{AM}=(-a/2,a,a).$$

Искомый угол $\varphi=\angle(BD_1,AM)$ вычислим с помощью скалярного произведения:

$$\cos\varphi=\frac{\big(\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{AM}\big)}{\big|\overrightarrow{BD_1}\big|\cdot\big|\overrightarrow{AM}\big|}=\frac{-a^2/2+a^2+2a^2}{\sqrt{6}a\cdot\sqrt{9a^2/4}}=\frac{5}{3\sqrt{6}}\;\Rightarrow\;\varphi=\arccos\frac{5}{3\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{5}{3\sqrt{6}}$.

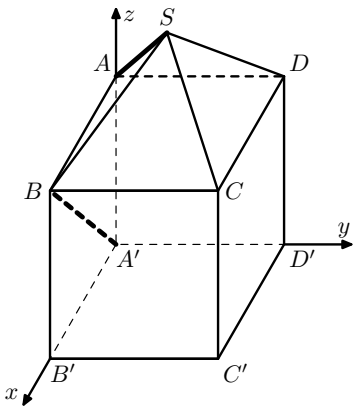


Рис. 10.

Пример 4. Верхняя грань $ABCD$ куба $ABCDA'B'C'D'$ (в котором $AA' || BB' || CC' || DD'$ - боковые ребра) является одновременно основанием правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, у которой высота вдвое меньше длины ребра куба и вершина S лежит вне куба. Найти угол между $A'B$ и AS.

Решение. Пусть высота пирамиды равна h, а длина ребра куба равна $2h$. Введем систему координат с центром в точке A' и с осями, параллельными ребрам $A'B'$, $A'D'$ и $A'A$. Тогда интересующие нас точки имеют координаты:

$$A' = (0;0;0), \quad B = (2h, 0, 2h), \quad A = (0, 0, 2h), \quad S = (h, h, 3h).$$

Найдем координаты векторов с концами в указанных точках:

$$\overrightarrow{A'B} = (2h, 0, 2h), \quad \overrightarrow{AS} = (h, h, h).$$

Обозначим через α угол между векторами $\overrightarrow{AS}$ и $\overrightarrow{A'B}$ и найдем $\cos\alpha$, используя скалярное произведение:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{A'B}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{2h^2 + 2h^2}{\sqrt{4h^2 + 4h^2} \cdot \sqrt{h^2 + h^2 + h^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\angle(A'B, AS) = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Пример 5. Основанием пирамиды $HPQR$ является равносторонний треугольник PQR, сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро

HR перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра QR, а другая — через точку R и середину ребра PQ.

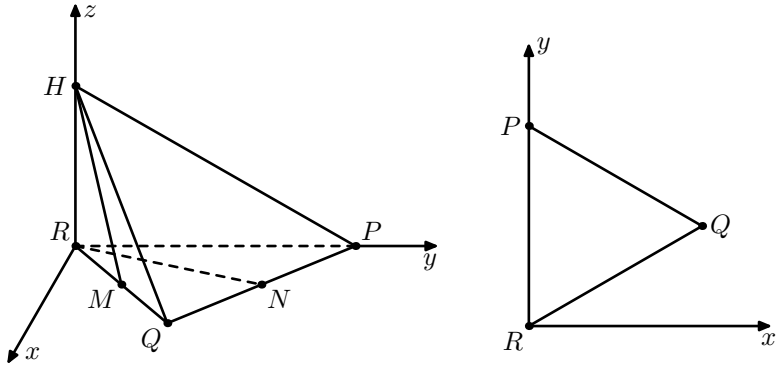


Рис. 11.

Решение. Введем систему координат с началом в точке R, направив координатные оси Oy и Oz вдоль ребер RH и RP соответственно и выбрав в качестве третьей оси Ox луч, лежащий в плоскости основания PQR и ортогональный ребру PR. Определим координаты вершин пирамиды и средних точек M и N:

$$H = (0,0,1), \quad R = (0,0,0), \quad P = (0,2\sqrt{2},0), \quad Q = (\sqrt{6},\sqrt{2},0),$$

$$M = \frac{R+Q}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{6},\sqrt{2},0), \quad N = \frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{6},3\sqrt{2},0).$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми RN и HM совпадает с длиной их общего перпендикуляра XY. Предположим, что точка X лежит на первой прямой, точка Y — на второй, и используем параметрические уравнения:

$$X \in RN \Rightarrow X = R + s \cdot \overrightarrow{RN} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}s, \frac{3\sqrt{2}}{2}s, 0\right),$$

$$Y \in HM \Rightarrow Y = H + t \cdot \overrightarrow{HM} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t, 1-t \right).$$

Так как вектор XY ортогонален обеим прямым, он должен быть сонаправлен векторному произведению

$$[\overrightarrow{RN}, \overrightarrow{HM}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{3} \right).$$

Следовательно, числа s и t могут быть найдены из системы линейных уравнений:

$$\overrightarrow{XY} \parallel [\overrightarrow{RN}, \overrightarrow{HM}] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}(t-s)}{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(t-3s)}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1-t}{-\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t-s}{-\sqrt{3}} = \frac{t-3s}{\sqrt{3}} = \frac{1-t}{-\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t-s = -(t-3s) \\ t-s = 1-t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2/3 \\ s = 1/3. \end{cases}$$

Таким образом, вектор $\overrightarrow{XY}$ имеет координаты

$$\overrightarrow{XY} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}(t-s), \frac{\sqrt{2}}{2}(t-3s), 1-t \right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3} \right),$$

а его длина представляет собой искомое расстояние и равна

$$|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{18}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\rho(RN, HM) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ отношение высоты SO к стороне основания равно $\sqrt{3}$. Найти угол между прямой DE, где E — середина апофемы SF грани ASB, и плоскостью ASC.

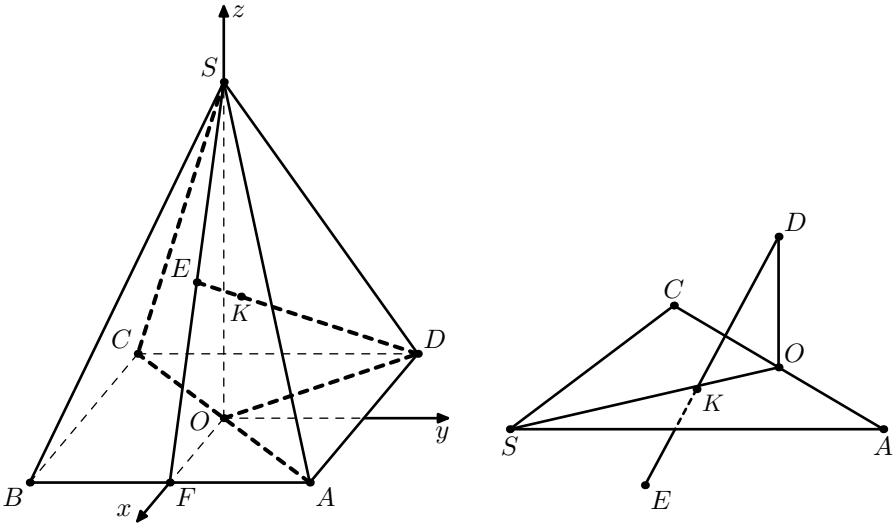


Рис. 12.

Решение. Обозначим через K точку пересечения прямой DE и плоскости ASC. Так как прямая OD перпендикулярна плоскости SAC, то отрезок KO служит проекцией DK на эту плоскость. Следовательно, искомый угол $\alpha = \angle(DE, SAC) = \angle DKO$ может быть найден из прямоугольного треугольника ODK:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \varphi = \angle ODK = \angle EDO = \angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DE}).$$

Обозначим сторону квадрата через a и введем систему координат с началом в его центре, направив оси Ox, Oy и Oz вдоль прямых BC, CD и SO соответственно.

Согласно условию, $SO = \sqrt{3}a$, поэтому точки O, D и E имеют координаты

$$D = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right), \quad E = \left(\frac{a}{4}, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \quad O = (0, 0, 0).$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{DE}$

$$\overrightarrow{OD} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right), \quad \overrightarrow{DE} = \left(\frac{3a}{4}, -\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

и вычислим угол между ними:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{OD}|} = \frac{|-\frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 0|}{\sqrt{(\frac{3a}{4})^2 + (-\frac{a}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2} \cdot \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{\frac{5}{8}a^2}{\frac{5}{4}a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\angle(DE, ASC) = \frac{\pi}{4}$.

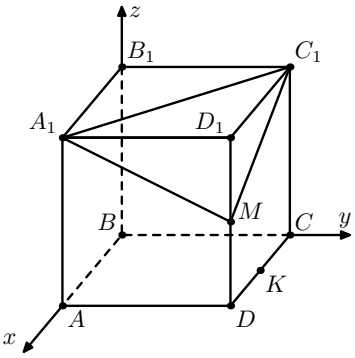


Рис. 13.

Пример 7. В кубе $AB\ldots D_1$ секущая плоскость P проходит через диагональ A_1C_1 и середину ребра DD_1. Найти расстояние от середины ребра CD до плоскости P, если ребро куба равно 4.

Решение. Введем систему координат с центром в точке B и направим оси Ox, Oy и Oz вдоль прямых BA, BC и BB_1 соответственно. Обозначим середины сторон DD_1 и CD через M и K и вычислим координаты точек A_1, C_1, M и K:

$$A_1(4,0,4), \quad C_1(0,4,4), \quad M(4,4,2) \quad K(2,4,0).$$

Рассмотрим тетраэдр A_1C_1MK и найдем его объем и площадь основания. Для этого составим образующие векторы и определим их

координаты:

$$\overrightarrow{MA_1} = (0, -4, 2), \quad \overrightarrow{MC_1} = (-4, 0, 2), \quad \overrightarrow{MK} = (-2, 0, -2).$$

Поскольку объем тетраэдра V равен трети произведения высоты на площадь основания,

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S_{A_1C_1M} = \frac{1}{6} \cdot H \cdot S\left(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}\right),$$

где H — искомое расстояние от точки K до плоскости (A_1C_1M), а $S\left(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}\right)$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{MA_1}$ и $\overrightarrow{MC_1}$. Таким образом, объем тетраэдра составляет шестую часть от объема параллелепипеда и может быть вычислен с помощью смешанного произведения:

$$V = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}, \overrightarrow{MK}\right) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8.$$

Площадь основания мы найдем, используя векторное произведение:

$$\left[\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 - 16\vec{e}_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S\left(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}\right) = |-8\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 - 16\vec{e}_3| = 8\sqrt{6}.$$

Следовательно, высота тетраэдра H совпадает с частным

$$H = \frac{6V}{S} = \frac{6 \cdot 8}{8\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $\sqrt{6}$.

Задачи для самостоятельной работы

105. Найти расстояние от точки $O(0,0)$ до середины отрезка AB, если $A=(-1,5), B=(3,-7)$.

106. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(2,4)$, $B(6,-4)$ и $C(-8,-1)$. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

107. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AF}=\vec{b}$. Найдите векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{BM}$, где M — середина EF.

108. На плоскости дана точка $M(-1,3)$. Найти координаты точки, симметричной точке M относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат; г) точки $K(3,1)$; д) биссектрисы первого и третьего координатных углов; е) биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

109. Точка M делит сторону BC треугольника ABC в отношении $\frac{BM}{MC}=\frac{2}{5}$. Известно, что $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Найти вектор AM.

110. На продолжениях сторон треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 так, что $\overrightarrow{AB}_1=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}_1=2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}_1=2\overrightarrow{AC}$. Найти площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если известно, что площадь треугольника ABC равна S.

111. Даны точки $A(-6,1), B(4,6)$. Найти координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $2:3$, считая от точки A.

112. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{2}$. Точка O выбрана в плоскости квадрата так, что $OB=10$, $OD=6$. Найти угол между вектором OB и вектором, направленным из точки O в наиболее удаленную от нее вершину квадрата.

113. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Докажите, что $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

114. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 4. Найти угол между его диагоналями.

115. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$. Точка N — середина ребра CD, точка M расположена на ребре CC_1, причем $C_1M : CM = 1 : 2$, K — точка пересечения диагоналей грани AA_1D_1D. Найти угол между KM и A_1N.

116. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна d, а длины ребер, исходящих из одной вершины, находятся в отношении $m : n : p$.

117. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной $2\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани образует с плоскостью соседней боковой грани угол, равный $30°$. Найти объем параллелепипеда.

118. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 и острым углом $60°$. Большая диагональ параллелепипеда равна 5. Найти его объем.

119. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с двумя из его граней углы, равные α и β. Найдите объем параллелепипеда.

9 Метод координат на плоскости

На плоскости $\mathbb{R}^2$ существует множество систем координат, с опорой на которые решаются многие задачи геометрии и механики. Среди них самыми практичными при организации вычислений являются *декартовы* и *полярные* системы координат.

Систему координат, состоящую из точки O, определяющей начало отсчета, и пары неколлинеарных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, образующих базис, называют аффинной. Если указанные векторы взаимноортогональны и обладают длиной, равной единице, то говорят о *декартовой (или прямоугольной)* системе координат. Для построения изображений используются оси Ox и Oy, сонаправленные с базисными векторами, которые позволяют определить координаты произвольной точки $M(x_m, y_m)$ как алгебраические (с учетом направления) длины проекций вектора OM на прямые Ox и Oy.

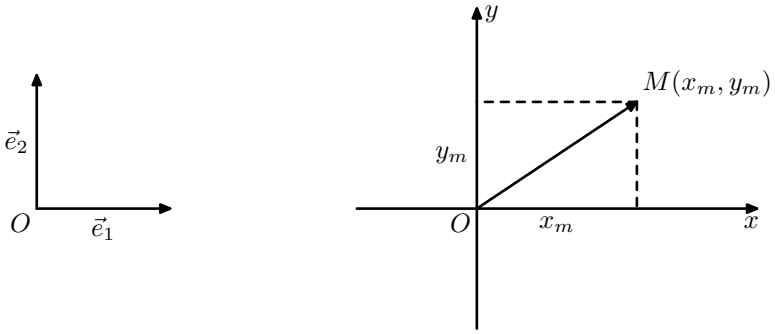


Рис. 14.

Полярной системой координат называют точку O, определяющую начало отсчета, с прикрепленной к ней *полярной осью* — лучом OP. Координатами произвольной точки M служит пара чисел ρ и φ, в которой *полярный радиус* ρ определяет расстояние от точки M до начала координат O, а *полярный угол* φ совпадает с углом между полярной осью OP до радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$.

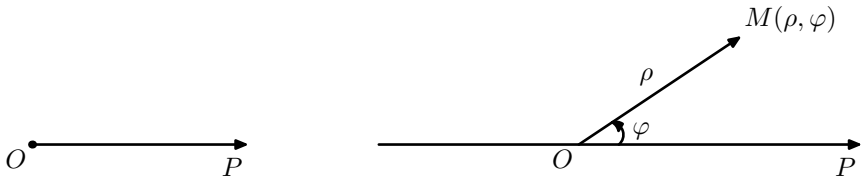


Рис. 15.

Величина полярного угла вычисляется с учетом направления вращения: если поворот от оси OP к вектору $\overrightarrow{OM}$ осуществляется против часовой стрелки, то угол φ считается положительным, в противном случае — отрицательным. Так как вектор $\overrightarrow{OM}$ при повороте на угол, кратный 360°, возвращается в начальное положение, то полярный угол определен неоднозначно — одной точке M соответствует множество углов $\varphi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Для того, чтобы между координатами и точками на плоскости возникало взаимно однозначное соответствие, на полярный угол φ накладывают одно из возможных ограничений:

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad \text{или} \qquad -\pi \leqslant \varphi < \pi, \qquad \text{или} \qquad -\pi < \varphi \leqslant \pi.$$

Начало координат O является *особой точкой* для полярной системы координат, так как для нее угол φ не определен.

Если на плоскости введены две системы координат, полярная и декартова, в которых совпадают начальные точки и направления лучей Ox и OP, то они называются *совмещенными*. В этом случае каждая точка M (за исключением начала координат) обладает двумя парами координат (x, y) и (ρ, φ), связанными следующими соотношениями:

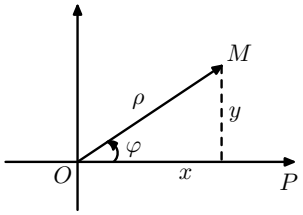


Рис. 16.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\varphi = x/\rho \\ \sin\varphi = y/\rho \end{cases}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

9.1 Прямая, окружность, парабола

Метод координат на плоскости представляет собой алгебраическое описание геометрических фигур — линий (кривых) и областей — с помощью алгебраических уравнений и неравенств. Все уравнения можно распределить по двум категориям — *параметрические* и *аналитические*. В первом случае координаты (x, y) всех точек фигуры F представляются в виде функций, зависящих от некоторого параметра t, с общей областью определения T:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T\}.$$

Во втором — фигура F задается как множество решений некоторого уравнения относительно координат (x, y):

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

Классическими примерами геометрических объектов, допускающих простое алгебраическое описание, служат прямая, окружность и парабола.

Прямая l на плоскости однозначно определяется указанием лежащей на ней точки $M_0(x_0, y_0)$ и *направляющего вектора* $\vec{v}(v_1, v_2)$, параллельного l. Произвольная точка плоскости $M(x, y)$ лежит на прямой только в том случае, если векторы $\vec{v}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ линейно зависимы.

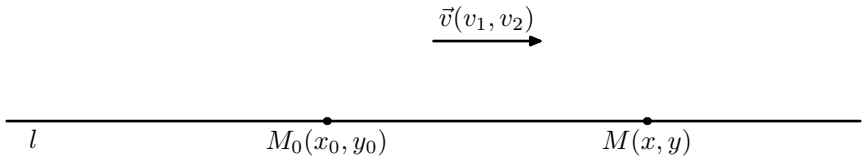


Рис. 17.

Зависимость равносильна существованию числа t, такого, что

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{v} \ \Leftrightarrow\ (x, y) - (x_0, y_0) = t \cdot (v_1, v_2) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \end{cases}.$$

Определение. Описание прямой l с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где пара (x_0, y_0) образована координатами точки $M_0 \in l$, а вектор $\vec{v} = (v_1, v_2)$ параллелен l, называется *параметрическим*.

Уравнение прямой, не зависящее от параметра, можно получить исключением переменной t из приведенной выше системы:

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot v_1 \\ y - y_0 = t \cdot v_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_2 \cdot x - v_1 \cdot y + (v_1 \cdot y_0 - v_2 \cdot x_0) = 0.$$

Определение. Описание прямой уравнением $ax + by + c = 0$ называется *аналитическим*.

$\circlearrowleft$ Рассмотрим на плоскости точки $M(1, 2)$ и $N(3, -2)$ и составим уравнение прямой MN. Для этого выпишем уравнение прямой

$$ax + by + c = 0$$

и подставим в него координаты данных точек:

$$\begin{cases} ax_m + by_m + c = 0 \\ ax_n + by_n + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases}.$$

Решим полученную систему, выбирая в качестве свободной переменной коэффициент a:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -(a + c) \\ 3a + (a + c) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a/2 \\ c = -2a \end{cases}.$$

Подставим найденные значения в общее уравнение

$$ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + ay/2 - 2a = 0$$

и разделим его на число $a/2$:

$$ax + ay/2 - 2a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y - 4 = 0.$$

Параметрическое уравнение той же прямой можно получить, выбрав M в качестве начальной точки, а вектор $\overrightarrow{MN}(2, -4)$ — направляющим:

$$MN : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \ \circlearrowleft$$

Лемма 9.1. *Если прямая l определена уравнением $ax + by + c = 0$, то вектор $\vec{n}(a, b)$ образует с ней прямой угол.*

□ Рассмотрим точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$, лежащие на прямой, и определим направляющий вектор $\vec{v} = \overrightarrow{MN}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Так как координаты точек M и N принадлежат l, их координаты удовлетворяют данному уравнению:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0, \\ ax_2 + by_2 + c = 0. \end{cases}$$

Разность полученных уравнений устанавливает ортогональность векторов $\vec{n}$ и $\vec{v}$:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{n}, \vec{v}) = 0.$$

Следовательно, прямая l, параллельная направляющему вектору $\vec{v}$, также ортогональна $\vec{n}$. ■

Лемма 9.2. *Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, может быть найдено по формуле*

$$\rho(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ .$$

□ Рассмотрим прямую $l^{\perp}$, проходящую через точку M и образующую прямой угол с данной прямой. Вектор $\vec{n}(a, b)$, ортогональный

исходной прямой l, будет направляющим для $l^{\perp}$, поэтому ее параметрическое уравнение имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b. \end{cases}$$

Обозначим через P точку пересечения прямых l и $l^{\perp}$

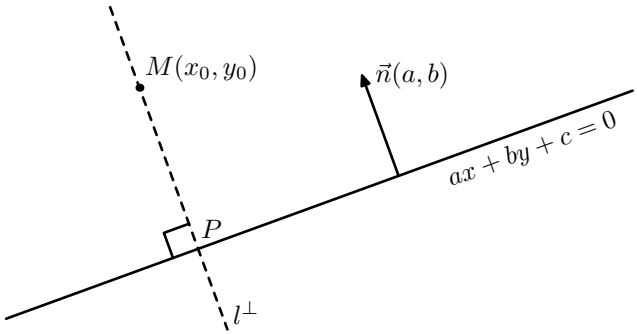


Рис. 18.

и найдем значение параметра t, соответствующее этой точке:

$$P \in l \;\Leftrightarrow\; a\cdot(x_0+t\cdot a)+b\cdot(y_0+t\cdot b)+c=0 \;\Leftrightarrow\; t=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\,.$$

Расстояние $\rho(M,l)$ совпадает с длиной вектора $\overrightarrow{MP} = t \cdot \vec{n}$, следовательно,

$$\rho(M,l) = |t \cdot \vec{n}| = |t| \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \blacksquare$$

Окружностью с центром в точке O и радиусом R называется геометрическое место точек M, равноудаленных от центра на расстояние R. Если центр окружности имеет координаты $O(x_0, y_0)$, то

произвольная точка $M(x, y)$ будет принадлежать окружности только в том случае, если

$$OM = R \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R \;\Leftrightarrow\; (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2.$$

Полученное равенство называется *уравнением окружности*.

$\circlearrowleft$ Запишем уравнение касательной к окружности

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y - 20 = 0,$$

проходящей через точку $P(4, 6)$. Для этого преобразуем данное выражение в уравнение окружности, выделив полные квадраты:

$$x^2-2x+y^2-4y-20 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2-2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4-20 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x-1)^2+(y-2)^2 = 25.$$

Координаты точки P удовлетворяют полученному (и исходному) уравнению, поэтому указанная точка лежит на окружности, а вектор $\overrightarrow{OP}(3, 4)$ ортогонален искомой касательной.

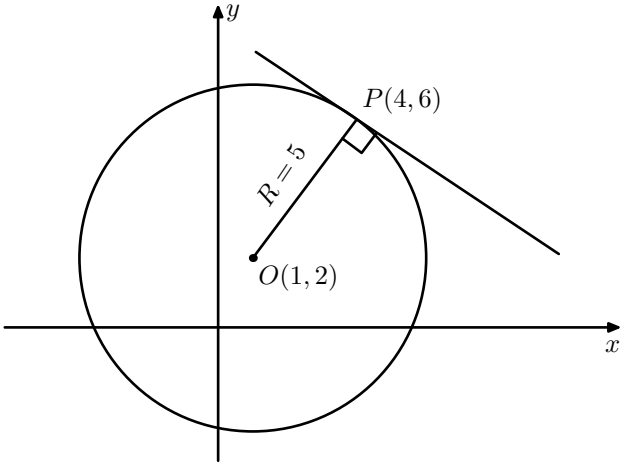


Рис. 19.

Следовательно, уравнение касательной имеет вид $3x+4y+c=0$. Неизвестный коэффициент c определим из условия $P(4,6)\in l$:

$$P(4,6)\in l \quad\Leftrightarrow\quad 3\cdot 4+4\cdot 6+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad c=-36.$$

Таким образом, получаем окончательный ответ: $3x+4y-36=0$. ⟲

Пусть F и l — точка и прямая на плоскости, расстояние между которыми равно $2c$, а H — основание перпендикуляра, опущенного из F на l. *Параболой* называется геометрическое место точек M, равноудаленных от *фокуса* F и *директрисы* l. Точка параболы V, делящая отрезок FH пополам, называется ее *вершиной*.

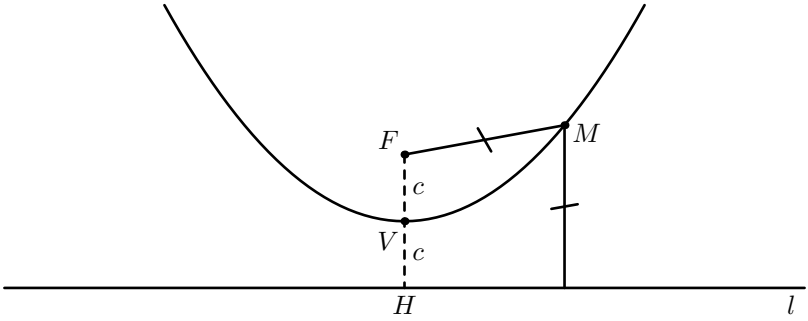


Рис. 20.

Выпишем уравнение параболы, руководствуясь ее определением. Если директриса l имеет уравнение $ax+by+c=0$, а фокус F располагается в точке с координатами $F(x_0,y_0)$, то условие $MF=\rho(F,l)$ для произвольной точки плоскости $M(x,y)$ имеет следующее координатное выражение:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (a^2+b^2)\cdot\Big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\Big)=(ax+by+c)^2. \qquad (3)$$

Лемма 9.3. *Прямая $l^\perp$, ортогональная директрисе l и проходящая через фокус F, является осью симметрии параболы.*

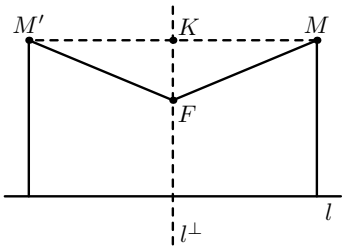


Рис. 21.

□ Пусть M — произвольная точка параболы. Докажем, что M', симметричная точке M относительно прямой $l^\perp$, также лежит на параболе. В силу симметрии, треугольники MFK и $M'FK$ равны, следовательно, их гипотенузы FM и FM' совпадают. Прямая MM', ортогональная прямой $l^\perp$, параллельна l, поэтому $\rho(M,l) = \rho(M',l)$. Согласно определению параболы, $FM = \rho(M,l)$, следовательно,

$$FM' = FM = \rho(M,l) = \rho(M',l).$$

Таким образом, точка M' также принадлежит параболе. ■

Определение. Система координат, начало которой совпадает с вершиной параболы, ось Ox параллельна директрисе, а ось Oy параллельна оси симметрии $l^\perp$, называется *канонической* (для данной параболы).

В канонической системе координат фокус параболы имеет координаты $F(0,c)$, а директриса описывается уравнением $y = -c$, поэтому общее уравнение (3) значительно сокращается и принимает наиболее простой вид:

$$x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = k \cdot x^2, \qquad k = \frac{1}{4c}.$$

9.2 Описание областей

Уравнение вида $f(x,y) = 0$, как правило, определяет на плоскости некоторую линию L, а соответствующие ему неравенства

$$f(x,y) < 0 \quad || \quad f(x,y) > 0 \quad || \quad f(x,y) \geqslant 0 \quad || \quad f(x,y) \leqslant 0$$

описывают плоскую область S с границей L. Строгий знак неравенства задает открытую область S без границы L, а нестрогий знак

— замкнутую область S, содержащую L. При изображении области данная особенность выражается при начертании линии: если $L \in S$, то граница рисуется сплошной линией, в противном случае — пунктиром.

Область S, ограниченная прямой L, представляет собой полуплоскость.

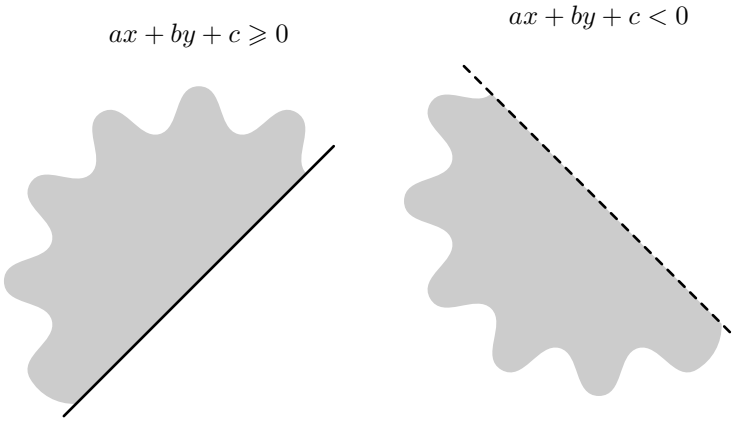


Рис. 22.

Область S, ограниченная окружностью, может быть либо кругом, либо его внешней областью.

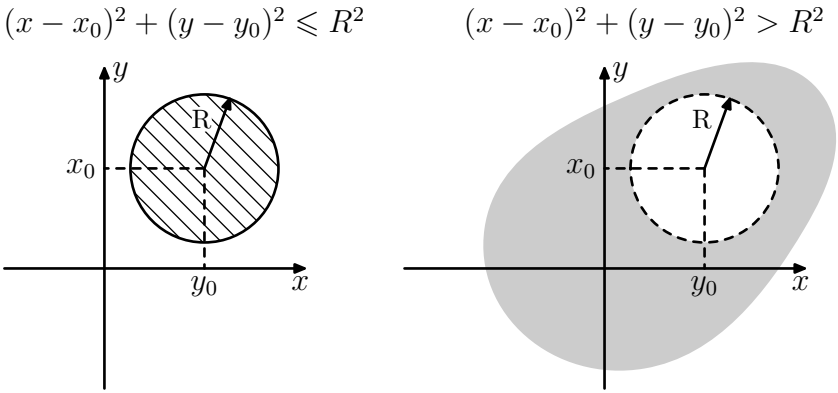


Рис. 23.

$\circlearrowleft$ Найдем площадь фигуры F, заданной на координатной плоскости системой неравенств:

$$\begin{cases} x(\sqrt{2}-x-y) \leqslant 0 \\ x^2+y^2 \leqslant 2. \end{cases}$$

Второе неравенство является стандартным и определяет круг с радиусом $\sqrt{2}$. Для описания области S, соответствующей первому неравенству, решим сначала уравнение $x(\sqrt{2}-x-y)=0$ его границы L. Данное равенство выполняется на прямых $x=0$ и $\sqrt{2}-x-y=0$, разбивающих плоскость на четыре части.

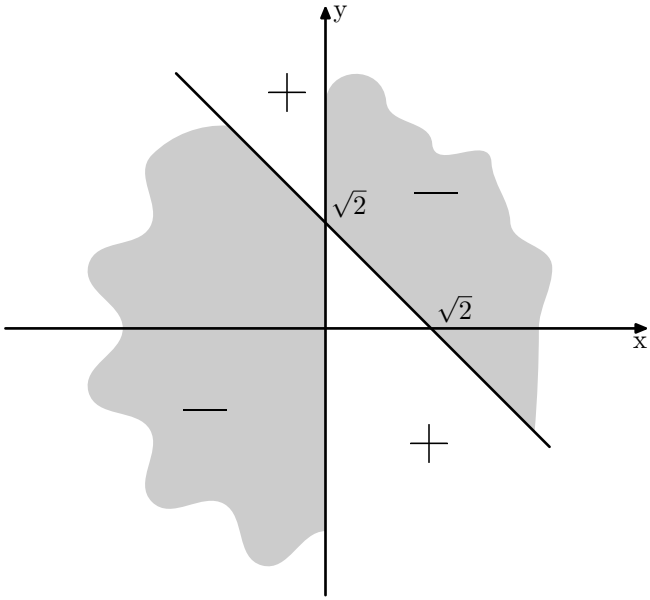


Рис. 24.

В каждой из этих частей выражение $x(\sqrt{2}-x-y)$ имеет определенный знак. Выбрав произвольные четыре точки, принадлежащие

указанным частям, определим соответствующий им знак. При этом область S будет состоять из частей, помеченных отрицательным знаком. Пересечение круга с заштрихованными частями плоскости представляет собой искомую фигуру F, состоящую из полукруга и сегмента:

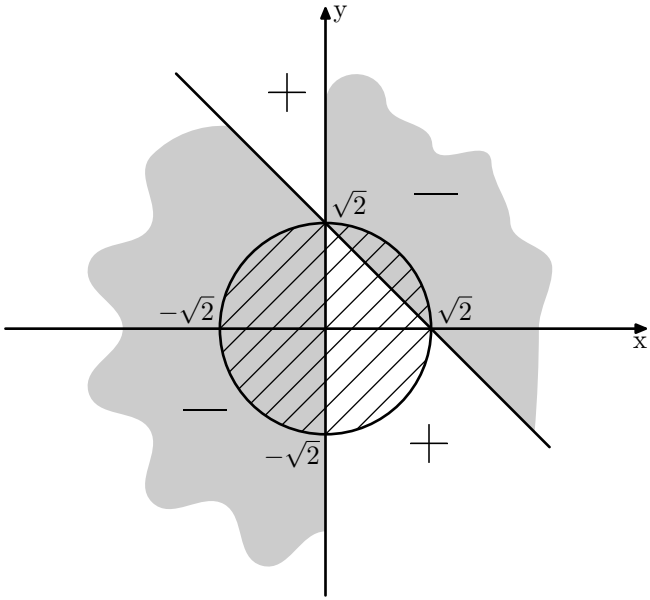


Рис. 25.

Рассмотрев разность четверти круга и прямоугольного треугольника, найдем площадь сегмента:

$$\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Прибавив к ней площадь полукруга, получим окончательный ответ:

$$S_F = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{3\pi}{2} - 1. \quad \circlearrowleft$$

9.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Найти аналитические уравнения тригонометрической окружности и биссектрисы первого и третьего координатного углов в полярной системе координат.

Решение. Центр тригонометрической окружности расположен в начале координат, а радиус равен единице. Следовательно, ее аналитическое описание в декартовой системе координат имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. Используя формулы, выражающие зависимость между декартовыми и полярными координатами, это уравнение можно значительно упростить:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi,\ y = \rho \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi = 1 \Leftrightarrow\ \rho = 1.$$

Точки, лежащие на биссектрисах координатных углов, обладают равными декартовыми координатами, что выражается равенством $x = y$. Те же формулы позволяют переписать его в тригонометрическом виде:

$$x = \rho\cdot\cos\varphi,\ y = \rho\cdot\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad x = y \Leftrightarrow\ \rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi \Leftrightarrow\ \operatorname{tg}\varphi = 1.$$

Ответ: $\rho = 1, \quad \operatorname{tg}\varphi = 1.$

Пример 2. Найти расстояние от фокуса параболы, заданной уравнением $y = x^2$, до прямой $l:\ 3x + 4y = 6$.

Решение. Так как в канонической системе координат парабола имеет уравнение $y = \frac{1}{4c} \cdot x^2$, ее фокус находится в точке $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Рас-

стояние до данной прямой находим по стандартной формуле:

$$\rho(F,l)=\frac{|3\cdot 0+4\cdot\frac{1}{4}-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1.$$

Ответ: $\rho=1$.

Пример 3. Прямая $y=-2x+2$ пересекается с прямой $y=x$ и с осью абсцисс в точках A и B соответственно. Найти площадь треугольника ABO, где O — начало координат.

Решение. Сначала определим координаты точек A и B:

$$A:\ \begin{cases} y=x \\ y=-2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow\ A=\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right);$$

$$B:\ \begin{cases} y=0 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow\ B=(1,0).$$

Таким образом, высота AH треугольника ABO, совпадающая с ординатой точки A, равна $\frac{2}{3}$, а его основание OB является отрезком, длина которого равна единице. Остается воспользоваться школьной формулой для нахождения площади треугольника:

$$S_{ABO}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

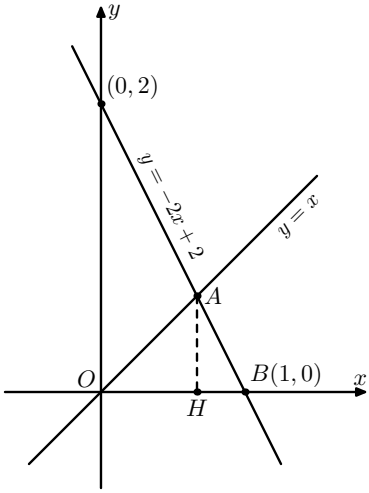


Рис. 26.

Ответ: $S_{AOB}=\frac{1}{3}$.

Пример 4. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$, если четыре его вершины заданы координатами $A=(0;2)$, $B=(1;7)$, $C=(10;7)$, $D=(7;1)$, а пятая вершина E является точкой пересечения прямых AC и BD.

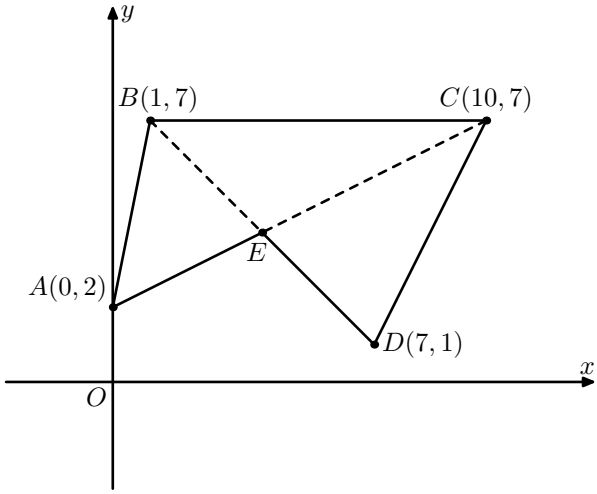


Рис. 27.

Решение. Сначала определим координаты точки $E = (x, y)$. Так как векторы $\overrightarrow{BE} = (x-1, y-7)$ и $\overrightarrow{DE} = (x-7, y-1)$ коллинеарны, их координаты пропорциональны:

$$\frac{x-1}{x-7} = \frac{y-7}{y-1}\,.$$

Аналогично для параллельных векторов $\overrightarrow{AE} = (x, y-2)$ и $\overrightarrow{CE} = (x-10, y-7)$ выполняется соотношение

$$\frac{x}{x-10} = \frac{y-2}{y-7}\,.$$

Объединим полученные уравнения в систему и найдем ее решение:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-7} = \dfrac{y-7}{y-1} \\ \dfrac{x}{x-10} = \dfrac{y-2}{y-7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 6y = 48 \\ -5x + 10y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow E = (4, 4).$$

Площадь пятиугольника $ABCDE$ вычислим по формуле

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{BDC} - S_{BEC}.$$

У всех треугольников, площади которых задействованы в приведенной формуле, общим основанием выступает отрезок BC, длина которого равна 9. Высоты, опущенные из вершин A, E и D, равны соответственно 5, 3 и 6. Остается воспользоваться формулой для нахождения площади треугольника:

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{BDC} - S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = 36.$$

Ответ: 36.

Пример 5. Найти периметр треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A = (-3; 5)$ и $B = (3; -3)$, а также точки $M = (6; 1)$ — середины BC.

Решение. Так как точка M является серединой отрезка BC, ее координаты могут быть найдены как полусуммы абсцисс и ординат вершин B и C:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \quad \text{и} \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Использовав условия задачи, найдем координаты точки C:

$$C = 2M - B = 2(6, 1) - (3, -3) = (9, 5).$$

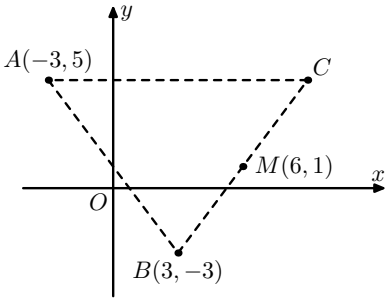


Рис. 28.

Чтобы найти периметр треугольника ABC, вычислим длины всех его сторон:

$$|AB| = \sqrt{(-3-3)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = 10,$$

$$|BC| = \sqrt{(9-3)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = 10,$$
$$|CA| = \sqrt{(-3-9)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{144+0} = 12.$$

Таким образом, искомая величина равна 32.

Ответ: 32.

Пример 6. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с катетами $AC = 8$ и $BC = 6$. Найти расстояние O_1O_2 между центрами вписанной и описанной окружностей.

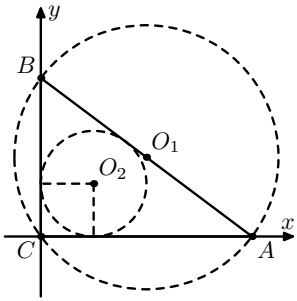


Рис. 29.

Решение. Введем систему координат, расположив ее начало в вершине прямого угла C и направив оси вдоль катетов AC и BC. Тогда вершины A и B будут иметь координаты $A = (8, 0)$ и $B = (0, 6)$. Центр описанной окружности O_1 служит основанием медианы CO_1, поэтому его координаты могут быть найдены как соответствующие полусуммы:

$$x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = 4 \quad \text{и} \quad y_1 = \frac{y_A + y_B}{2} = 3.$$

Вычислим радиус вписанной окружности r через площадь треугольника S и полупериметр p:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot BC}{\frac{1}{2}(AC + BC + AB)} = \frac{AC \cdot BC}{AC + BC + AB} = \frac{8 \cdot 6}{6 + 8 + 10} = 2.$$

Следовательно, центр O_2 имеет координаты $x_2 = 2$ и $y_2 = 2$, а расстояние O_1O_2 может быть найдено по формуле

$$O_1O_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Ответ: $O_1O_2 = \sqrt{5}$.

Пример 7. Найти площадь S плоской фигуры M, заданной неравенством $M:\ 2|x-1|+|y+2x-1|\leqslant 5$.

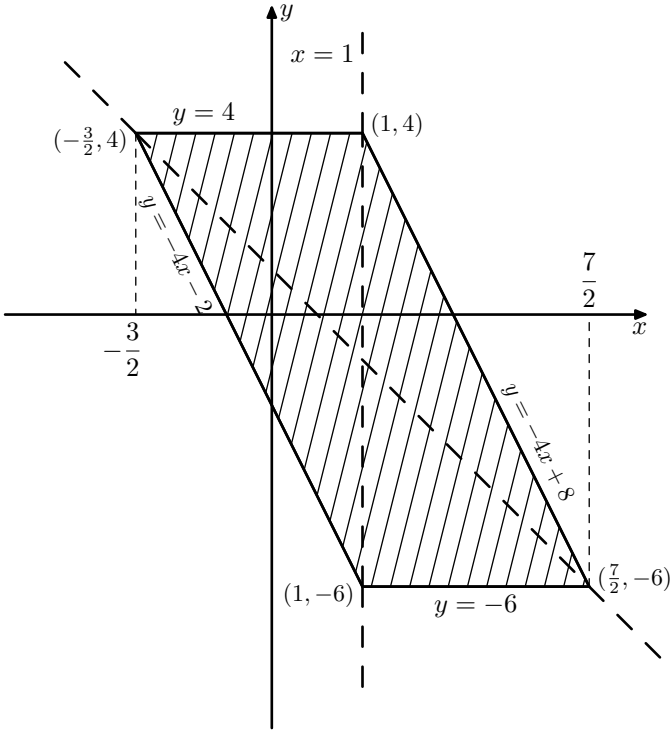


Рис. 30.

Решение. Сначала построим границу фигуры δM,

$$\delta M:\ 2|x-1|+|y+2x-1|=5,$$

предварительно раскрыв модули. Для этого приравняем подмодульные выражения к нулю и построим соответствующие прямые $x-1=0$ и $y+2x-1=0$. Они разбивают плоскость на четыре области, в каждой из которых выражения $(x-1)$ и $(y+2x-1)$ имеют постоянный знак. Для первой области ($x-1>0$ и $y+2x-1>0$) знак

модуля можно просто опустить:

$$2|x-1|+|y+2x-1|=5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-2+y+2x-1=5 \Leftrightarrow 4x+y-8=0.$$

Во второй области ($x-1<0$ и $y+2x-1>0$) указанное уравнение перепишем в виде

$$2|x-1|+|y+2x-1|=5 \quad \Leftrightarrow \quad -2x+2+y+2x-1=5 \Leftrightarrow y-4=0.$$

В третьей ($x-1<0$ и $y+2x-1<0$) и четвертой ($x-1>0$ и $y+2x-1<0$) областях после раскрытия модулей получаем прямые, параллельные первым двум: $4x+y+2=0$ и $y+6=0$.

Таким образом, граница δM представляет собой параллелограмм, а само множество M заполняет его внутренность. Поскольку площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, то

$$S=\frac{5}{2}\cdot 10=25.$$

Ответ: $S=25$.

Задачи для самостоятельной работы

120. Найти длину хорды, которую на прямой $y=3x$ высекает окружность $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

121. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1,1)$, $B(9,3)$ и $C(1,7)$.

122. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1,4)$ перпендикулярно прямой $x-2y+4=0$.

123. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(0,7)$ и касающейся окружности $(x-15)^2+(y-2)^2=25$.

124. Составить уравнение окружности с центром в точке $O(3,2)$, касающейся прямой $y=2x+6$.

125. Точка M лежит на прямой $3x - 4y + 34 = 0$, а точка N принадлежит окружности $x^2+y^2-8x+2y-8 = 0$. Найти наименьшее расстояние между точками N и M.

126. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+y-5 = 0$ и $3x + y + 4 = 0$.

127. Найти наименьшее значение выражения

$$|a + b| + \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 3)^2}.$$

128. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 4)$ и касающейся параболы $y = x^2$ (без использования производной). Найти точку F', симметричную фокусу относительно найденной прямой. Доказать, что точка F' лежит на директрисе.

129. Найти вершину параболы, фокус которой расположен в точке $F(3, 1)$, а директриса d задана уравнением $x - y + 2 = 0$.

130. Написать уравнение параболы, фокус которой расположен в точке $F(-2, 1)$, а директриса d задана уравнением $x + 2y + 2 = 0$. Определить взаимное расположение параболы и точки $M(-1, 2)$.

131. Написать уравнение оси симметрии для параболы, фокус которой расположен в точке $F(-2, -3)$, а директриса d задана уравнением $2x - y + 2 = 0$.

132. Источник света S помещен в фокус параболического зеркала. Доказать, что все лучи, исходящие из S, при отражении распространяются параллельно оси симметрии зеркала.

133. Написать уравнение окружности с центром в точке $O(5, 1)$, которая внешним образом касается окружности $(x-1)^2+(y+2)^2 = 9$ в точке P. Найти координаты точки P и уравнение общей касательной, проходящей через точку P.

134. Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 5 \\ x^2 + y^2 \geqslant 5(2x - 2y - 5) \\ (7x + 3y + 15)(x + 4y - 5) \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы.

135. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4|x| \\ |x| + |y| \geqslant 2 \\ x^2 - y^2 + 16 - 8x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы.

10 Метод координат в пространстве

Алгебраический подход в геометрии, представленный выше для плоскости, имеет естественное продолжение в пространстве. Описание декартовой системы координат для трехмерного случая остается без изменений, в то время как полярная система координат уступает свое место цилиндрической. Основными объектами изучения становятся прямая, плоскость и сфера.

Аффинная система координат в пространстве определяется заданной точкой отсчета O и тройкой линейно независимых векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Координаты (x_m, y_m, z_m) произвольной точки M представляют собой коэффициенты разложения *радиус-вектора* OM по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Если базис составлен из взаимно ортогональных векторов с длиной, равной единице, то система называется *декартовой*, а координаты (x_m, y_m, z_m) можно интерпретировать как расстояния от точки M до координатных плоскостей Oyz, Oxz и Oxy.

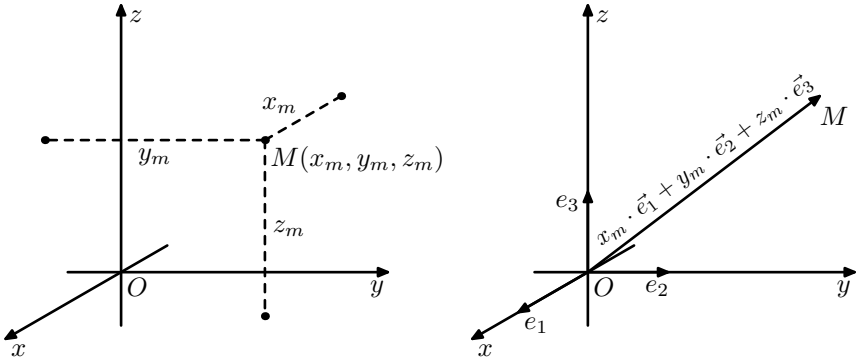


Рис. 31.

Цилиндрическая система в пространстве задается началом отсчета O и двумя взаимно ортогональными направлениями *полярной оси* OP *и цилиндрической (продольной) оси* Oh. Положение каждой точки пространства M характеризуется тройкой чисел (ρ, φ, h). Пара (ρ, φ) образует полярные координаты проекции точки M на

плоскость, содержащую начало координат и ортогональную цилиндрической оси. Третье число h определяет высоту (со знаком), на которой расположена точка M относительно этой плоскости.

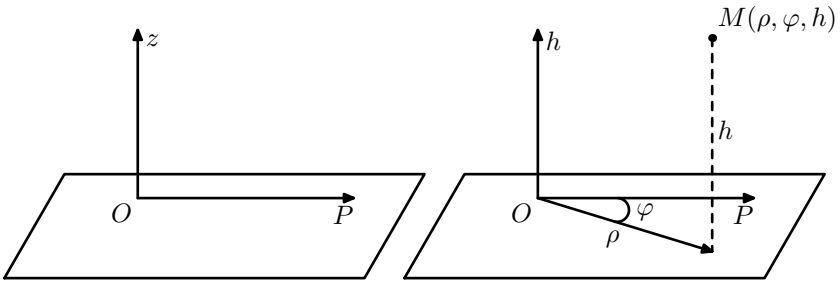


Рис. 32.

Если точки отсчета цилиндрической и декартовой систем совпадают, а оси OP и Ox, Oz и Oh сонаправлены, то координаты одной и той же точки M, отличной от начала координат, связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ h = z. \end{cases}$$

10.1 Плоскость, прямая, сфера

Плоскость, лежащая в пространстве $\mathbb{R}^3$, порождается начальной точкой S и парой базисных векторов $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$. Точка M попадает на данную плоскость Π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{SM}$ раскладывается в линейную комбинацию $\overrightarrow{SM} = \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v}$ с некоторыми коэффициентами λ и μ.

Определение. Описание плоскости Π в виде

$$\Pi = \{M = S + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

называется *параметрическим*. В качестве параметров выступают свободные числа λ и μ, а тройки чисел

$$S = (x_0, y_0, z_0), \ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

определяют координаты порождающих плоскость элементов.

Векторная алгебра приводит к более лаконичному описанию плоскости в пространстве, обобщающим аналитическое уравнение прямой на плоскости. Вектор $\overrightarrow{SM}$ раскладывается в линейную комбинацию базисных векторов лишь в том случае, когда данная тройка линейно зависима. В геометрических терминах это эквивалентно вырождению (равенству нулю) объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\overrightarrow{SM}$:

$$M \in \Pi \Leftrightarrow V = (\overrightarrow{SM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0, \quad (a, b, c) = [\vec{u}, \vec{v}], \quad d = -\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Определение. Описание плоскости в виде уравнения $ax + by + cz + d = 0$ называется *аналитическим*.

Лемма 10.1. *Если плоскость* Π *определена уравнением* $ax + by + cz + d = 0$, *то вектор* $\vec{n} = (a, b, c)$ *образует с ней прямой угол.*

□ Рассмотрим произвольные точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на плоскости, и определим вектор

$$\vec{v} = \overrightarrow{MN}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Так как координаты точек M и N принадлежат Π, то их координаты удовлетворяют данному уравнению:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0. \end{cases}$$

Вычислив разность этих уравнений, получим равенство

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{n}, \vec{v}) = 0,$$

равносильное ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\vec{v}$. Таким образом, вектор $\vec{n}$ ортогонален любому вектору, лежащему в плоскости Π. ■

Развивая технику построения проекций в плоскости, несложно вывести стереометрический аналог формулы для вычисления расстояний.

Лемма 10.2. *Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости Π, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, может быть найдено по формуле*

$$\rho(M, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \ .$$

□ Обозначим буквой N основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость Π.

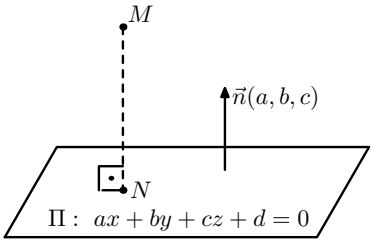


Рис. 33.

Так как векторы $\vec{n} = (a, b, c)$ и $\overrightarrow{MN}$ параллельны, то существует число t, удовлетворяющее уравнению

$$\overrightarrow{MN} = t \cdot \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad N = M + t \cdot \vec{n} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad N = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

Учитывая, что точка N лежит в плоскости Π, можно найти значение параметра t:

$$N \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot (x_0 + at) + b \cdot (y_0 + bt) + c \cdot (z_0 + ct) + d = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(ax_0+by_0+cz_0+d)+t\cdot(a^2+b^2+c^2)=0 \;\Leftrightarrow\; t=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

Расстояние $\rho(M,\Pi)$ совпадает с длиной вектора $\overrightarrow{MN}=t\cdot\vec{n}$, следовательно,

$$\rho(M,\Pi)=|t\cdot\vec{n}|=|t|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\;.\;\blacksquare$$

Прямая линия l пространства $\mathbb{R}^3$ может быть описана с помощью произвольной точки $M(x_0,y_0,z_0)$, лежащей на ней, и направляющего вектора $a,\vec{b},c$.

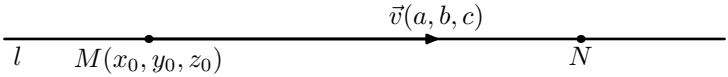


Рис. 34.

Точка $N(x,y,z)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда векторы MN и $\vec{v}$ коллинеарны:

$$N\in l \;\;\Leftrightarrow\;\; \overrightarrow{MN}\parallel\vec{v} \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

То же самое условие может быть записано в терминах линейной зависимости:

$$N\in l \;\;\Leftrightarrow\;\; \overrightarrow{MN}\parallel\vec{v}\Leftrightarrow\;\; \overrightarrow{MN}=t\cdot\vec{v} \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\; N-M=t\cdot\vec{v} \;\;\Leftrightarrow\;\; N=M+t\cdot\vec{v},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Определение. Описание пространственной прямой l в виде

$$l:\;\; x=x_0+t\cdot a,\; y=y_0+t\cdot b,\; z=z_0+t\cdot c,\quad t\in\mathbb{R},$$

где тройки чисел (x_0,y_0,z_0) и (a,b,c) образуют координаты некоторой точки прямой и ее направляющего вектора, называется *параметрическим*.

$\circlearrowleft$ Найдем направляющий вектор прямой, заданной в виде пересечения двух плоскостей:

$$l : \begin{cases} 3x + 2y + z - 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Для этого решим систему линейных уравнений, считая переменную z свободной

$$\begin{cases} 3x + 2y + z - 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4z + 1 \\ x = -3z \end{cases}$$

и выпишем ответ с помощью фундаментальной системы решений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ 4z + 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Полученное равенство представляет собой параметрическое уравнение прямой l, поэтому в качестве направляющего можно выбрать вектор $\vec{v}(-3, 4, 1)$. Так как прямая l представляет собой пересечение плоскостей, ее направляющий вектор должен быть ортогонален нормальным векторам

$$\vec{n}_1 = (3, 2, 1) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_2 = (1, 1, -1).$$

Поэтому та же задача может быть решена с привлечением векторного произведения:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = (-3, 4, 1). \ \circlearrowright$$

Сферой с центром O и радиусом R называется геометрическое место точек M, равноудаленных от центра на расстояние R. Если центр сферы имеет координаты $O(x_0, y_0 z_0)$, то произвольная точка $M(x, y, z)$ будет принадлежать сфере только в том случае, если

$$OM = R \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Полученное равенство называется *уравнением сферы*.

10.2 Пучки сфер и плоскостей

Множество линий или поверхностей в пространстве $\mathbb{R}^3$, обладающих определенным геометрическим свойством, называют *пучком*. Например, боковую поверхность кругового конуса с вершиной в начале координат O и осью, параллельной Oz, можно понимать как пучок прямых, выходящих из точки O, и образующих с плоскостью Oxy постоянный угол α. Пучки прямых, сфер и плоскостей оказываются полезным инструментом при решении задач, так как они имеют простое алгебраическое описание.

Теорема 10.3. *Плоскость* Π *принадлежит пучку плоскостей, проходящих через данную прямую* l

$$l: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Px + Qy + Rz + S = 0 \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда ее уравнение представляет собой линейную комбинацию

$$\lambda \cdot (Ax + By + Cz + D) + \mu \cdot (Px + Qy + Rz + S) = 0$$

с некоторым коэффициентами λ *и* μ.

□ *Необходимость.* Обозначим через $\Pi^{\perp}$ произвольную плоскость, ортогональную прямой l. Так как прямая l является пересечением плоскостей

$$\Pi_1: \ Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{и} \quad \Pi_2: \ Px + Qy + Rz + S = 0,$$

нормальные векторы

$$\vec{n}_1 = (A, B, C), \qquad \vec{n}_2 = (P, Q, S)$$

можно выбрать в качестве базиса плоскости $\Pi^{\perp}$. Разложим нормальный вектор плоскости Π по этому базису

$$\vec{n} = \lambda \cdot \vec{n}_1 + \mu \cdot \vec{n}_2 = (\lambda A + \mu P, \ \lambda B + \mu Q, \ \lambda C + \mu R)$$

и запишем уравнение этой плоскости

$$\Pi:\ (\lambda A+\mu P)x+(\lambda B+\mu Q)y+(\lambda C+\mu R)z+\gamma=0$$

с одним неизвестным параметром γ. Для определения этого коэффициента рассмотрим произвольную точку $M(x_0,y_0,z_0)$, лежащую на прямой l, и подставим ее координаты в уравнение плоскости Π:

$$(\lambda A+\mu P)x_0+(\lambda B+\mu Q)y_0+(\lambda C+\mu R)z_0+\gamma=0.$$

Найдем γ, учитывая, что M лежит на обеих плоскостях Π_1 и Π_2:

$$\begin{gathered}\lambda(Ax_0+By_0+Cz_0)+\mu(Px_0+Qy_0+Rz_0)+\gamma=0\ \ \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ \ \lambda(Ax_0+By_0+Cz_0+D)-\lambda\cdot D+\mu(Px_0+Qy_0+Rz_0+S)-\mu\cdot S+\gamma=0\\ \Leftrightarrow\ \ -\lambda D-\mu S+\gamma=0\ \ \Leftrightarrow\ \ \gamma=\lambda D+\mu S\ \ \Leftrightarrow\ \ \gamma=\lambda D+\mu S.\end{gathered}$$

Подставив найденное значение в уравнение плоскости Π, получим утверждение теоремы:

$$(\lambda A+\mu P)x+(\lambda B+\mu Q)y+(\lambda C+\mu R)z+\gamma=0\ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ \lambda\cdot(Ax+By+Cz+D)+\mu\cdot(Px+Qy+Rz+S)=0.$$

Достаточность. Рассмотрим произвольную точку $M(x_0,y_0,z_0)$, лежащую на прямой l, и покажем, что она также принадлежит плоскости Π. Так как прямая l совпадает с пересечением плоскостей Π_1 и Π_2, координаты точки M удовлетворяют уравнениям

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\quad\text{и}\quad Px_0+Qy_0+Rz_0+S=0.$$

Следовательно, ее координаты удовлетворяют и линейной комбинации этих уравнений

$$\lambda\cdot(Ax_0+By_0+Cz_0+D)+\mu\cdot(Px_0+Qy_0+Rz_0+S)=0,$$

что говорит о принадлежности точки M плоскости Π. Таким образом, произвольная точка прямой l лежит на плоскости Π, что равносильно условию $l\subset\Pi$. ■

$\circlearrowleft$ Найдем уравнение биссекторной плоскости Π для угла, образованного плоскостями

$$\Pi_1:\ 2x+y-2z+3=0 \quad \text{и} \quad \Pi_2:\ x-2y+2z-1=0.$$

Нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости Π, как было показано, представляет собой линейную комбинацию нормальных векторов

$$\vec{n}_1=(2,1,-2) \quad \text{и} \quad \vec{n}_2=(1,-2,2)$$

с некоторыми коэффициентами λ и μ:

$$\vec{n}=\lambda\cdot\vec{n}_1+\mu\cdot\vec{n}_2.$$

Чтобы плоскость Π была биссекторной, должно выполняться равенство для двугранных углов

$$\angle(\Pi,\Pi_1)=\angle(\Pi,\Pi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \angle(\vec{n},\vec{n}_1)=\angle(\vec{n},\vec{n}_2).$$

Преобразуем данное уравнение, используя скалярное произведение:

$$\angle(\Pi,\Pi_1)=\angle(\Pi,\Pi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(\vec{n},\vec{n}_1)}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}_1|}=\frac{(\vec{n},\vec{n}_2)}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

Так как длины векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ совпадают, знаменатели указанных дробей можно отбросить и упростить полученное уравнение путем следующей последовательности преобразований:

$$(\vec{n},\vec{n}_2)=(\vec{n},\vec{n}_2) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda\cdot\vec{n}_1+\mu\cdot\vec{n}_2,\vec{n}_1)=(\lambda\cdot\vec{n}_1+\mu\cdot\vec{n}_2,\vec{n}_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda\cdot(\vec{n}_1,\vec{n}_1)+\mu\cdot(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\lambda\cdot(\vec{n}_1,\vec{n}_2)+\mu\cdot(\vec{n}_2,\vec{n}_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 9\lambda-4\mu=-4\lambda+9\mu \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=\mu.$$

Так как уравнение плоскости Π определяется с точностью до коэффициента пропорциональности, мы можем выбрать в качестве λ и μ произвольные равные числа. Подставив в уравнение плоскости Π коэффициенты $\lambda=\mu=1$, получим ответ

$$\Pi:\ \lambda\cdot(2x+y-2z+3)+\mu\cdot(x-2y+2z-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-y+2=0. \ \circlearrowright$$

Теорема 10.4. *Сфера S проходит через окружность (S принадлежит пучку сфер, проходящих через данную окружность), заданную системой*

$$c: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда ее уравнение представляет собой линейную комбинацию

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 + \lambda \cdot (Ax + By + Cz + D) = 0$$

с некоторым коэффициентом λ.

□ *Необходимость.* Обозначим буквами Π и S_0 плоскость и сферу

$$\Pi: \ Ax+By+Cz+D=0, \quad S_0: \ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R_0^2,$$

которые пересекаются по окружности c. Так как обе сферы S_0 и S проходят через c, центры O и O' лежат на прямой $l^\perp$, содержащей центр этой окружности N и перпендикулярной плоскости Π.

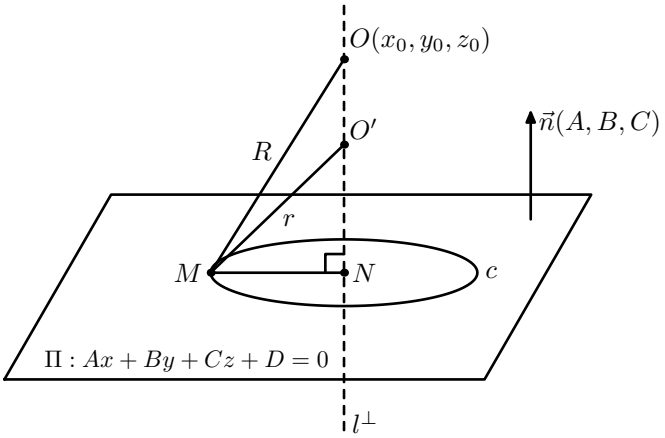


Рис. 35.

Вектор $\overrightarrow{OO'}$ коллинеарен нормальному вектору $\vec{n}(A, B, C)$ с некоторым коэффициентом пропорциональности t, следовательно,

$$\overrightarrow{OO'} = t \cdot \vec{n} \Leftrightarrow O' - O = t \cdot \vec{n} \Leftrightarrow O' = O + t \cdot \vec{n} = (x_0 + tA, y_0 + tB, z_0 + tC).$$

Рассмотрим произвольную точку M окружности c и применим теорему Пифагора к треугольникам MNO' и MNO

$$\begin{cases} OM^2 = MN^2 + NO^2 \\ O'M^2 = MN^2 + O'N^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = MN^2 + NO^2 \\ r^2 = MN^2 + O'N^2, \end{cases}$$

где r — радиус сферы S. Вычислив разность полученных равенств

$$r^2 - R^2 = O'N^2 - ON^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = R^2 + O'N^2 - ON^2$$

и определив длины отрезков ON и $O'N$ как расстояния от центров O и O' до плоскости Π

$$ON^2 = \frac{\Big(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\Big)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$ON' = \frac{\Big(A(x_0 + tA) + B(y_0 + tB) + C(z_0 + tC) + D\Big)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

можно найти квадрат радиуса r:

$$r^2 = R^2 + 2t(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + t^2(A^2 + B^2 + C^2).$$

Используя найденное значение, запишем уравнение сферы S и приведем его к стандартному виду:

$$\big(x - (x_0 + tA)\big)^2 + \big(y - (y_0 + tB)\big)^2 + \big(z - (z_0 + tC)\big)^2 = r^2 =$$

$$= R^2 + 2t(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + t^2(A^2 + B^2 + C^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 - 2t(Ax + By + Cz + D) = 0.$$

Таким образом, уравнение сферы представляется в виде искомой линейной комбинации с коэффициентом $\lambda\ 2t$.

Достаточность. Рассмотрим произвольную точку $M(x_m, y_m, z_m)$, лежащую на окружности c, и покажем, что она также принадлежит сфере S. Так как окружность c совпадает с пересечением плоскости Π и сферы S_0, координаты точки M удовлетворяют уравнениям

$$Ax_m+By_m+Cz_m+D=0 \quad \text{и} \quad (x_m-x_0)^2+(y_m-y_0)^2+(z_m-z_0)^2=R^2.$$

Следовательно, ее координаты удовлетворяют и линейной комбинации этих уравнений

$$(x_m-x_0)^2+(y_m-y_0)^2+(z_m-z_0)^2-R^2+\lambda\cdot(Ax_m+By_m+Cz_m+D)=0,$$

что говорит о принадлежности точки M сфере S. Таким образом, произвольная точка окружности c лежит на сфере S, что равносильно условию $c \in S$. ■

10.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Написать уравнение плоскости Π, проходящей через точки $P(2,1,5)$, $Q(1,0,3)$ и $R(-6,1,1)$.

Решение. Запишем общее уравнение плоскости с неизвестными коэффициентами

$$\Pi:\ Ax+By+Cz+D=0$$

и подставим в него координаты данных точек:

$$P:\ 2A+B+5C+D=0,\ \ Q:\ A+3C+D=0,\ \ R:\ -6A+B+C+D=0.$$

Объединим полученные уравнения в систему и найдем ее общее решение:

$$\left\{\begin{array}{l} 2A+B+5C+D=0 \\ A+3C+D=0 \\ -6A+B+C+D=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=-2A-5C-D \\ A+3C+D=0 \\ -8A-4C=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=-2A-5C-D \\ A+3\cdot(-2A)+D=0 \\ C=-2A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=3A \\ D=5A \\ C=-2A \end{array}\right. .$$

Подставим найденное решение в общее уравнение плоскости и поделим его на свободную переменную:

$$\Pi:\ Ax+3Ay-2Az+5A=0 \quad \Leftrightarrow \quad \Pi:\ x+3y-2z+5=0.$$

Ответ: $\Pi:\ x+3y-2z+5=0.$

Пример 2. Даны точки $P(1,0,1)$, $Q(-2,2,1)$, $R(2,0,3)$ и $T(0,4,-2)$. Найти угол между PQ и плоскостью QRT.

Решение. Выпишем общее уравнение плоскости с неизвестными коэффициентами

$$(QRT):\ Ax+By+Cz+D=0,$$

подставим в него координаты данных точек

$$T:\ 4B-2C+D=0,\ \ Q:\ -2A+2B+C+D=0,\ \ R:\ 2A+3C+D=0$$

и найдем общее решение полученной системы:

$$\left\{\begin{array}{l} D=2C-4B \\ -2A-2B+3C=0 \\ 2A+5C-4B=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} D=-5B/2 \\ A=B/8 \\ C=3B/4 \end{array}\right. .$$

Подставим найденное решение в уравнение плоскости, поделим его на свободную переменную и домножим на общий знаменатель:

$$(QRT):\ \frac{B}{8}x + By + \frac{3B}{4}z - \frac{5B}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 8y + 6z - 20 = 0.$$

Угол между прямой PQ и плоскостью QRT дополняет угол между вектором $\overrightarrow{PQ} = (-3, 2, 0)$ и нормалью к плоскости $\vec{n} = (1, 8, 6)$ до прямого, следовательно,

$$\angle(PQ, QRT) = \frac{\pi}{2} - \angle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\left|\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{n}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot |\vec{n}|} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|-3+16|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{101}} = \frac{\pi}{2} - \arccos \sqrt{\frac{13}{101}} = \arcsin \sqrt{\frac{13}{101}}.$$

Ответ: $\angle(PQ, QRT) = \arcsin \sqrt{\frac{13}{101}}$.

Пример 3. В кубе $AB \ldots D_1$ секущая плоскость Π проходит через диагональ A_1C_1 и середину ребра DD_1. Найти расстояние от середины ребра CD до плоскости P, если ребро куба равно 4.

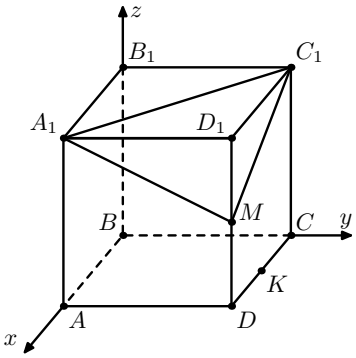


Рис. 36.

Решение. Введем систему координат с центром в точке B и направим оси Ox, Oy и Oz вдоль прямых BA, BC и BB_1 соответственно. Обозначим середины сторон DD_1 и CD через M и K и вычислим координаты точек A_1, C_1, M и K: $A_1(4, 0, 4)$, $C_1(0, 4, 4)$, $M(4, 4, 2)$, $K(2, 4, 0)$. Составим уравнение плоскости Π, подставив в общее уравнение

$$\Pi:\ ax + by + cz + d = 0$$

координаты точек A_1, C_1 и M:

$$\left\{\begin{array}{l} A_1:\ 4a+4c+d=0 \\ C_1:\ 4b+4c+d=0 \\ M:\ 4a+4b+2c+d=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=b \\ 4b+4c+d=0 \\ 8b+2c+d=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=b \\ c=2b \\ d=-12b \end{array}\right. \Leftrightarrow \Pi:\ x+y+2z-12=0.$$

Для определения искомого расстояния воспользуемся доказанной формулой:

$$\rho(K,\Pi)=\frac{|2+4-12|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{6}.$$

Ответ: $\sqrt{6}$.

Пример 4. Основанием пирамиды $HPQR$ является равносторонний треугольник PQR, сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро HR перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра QR, а другая проходит через точку R и середину ребра PQ.

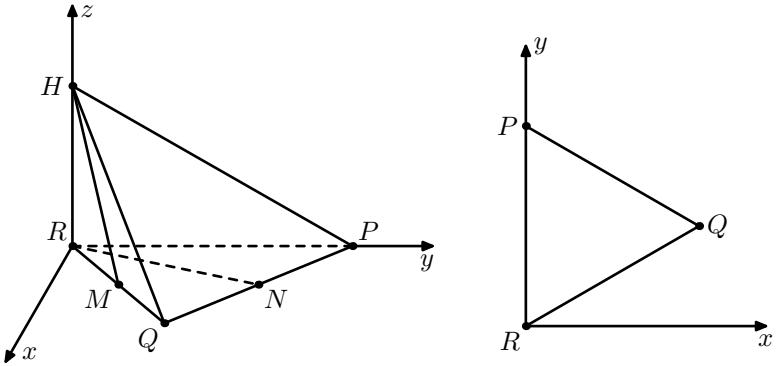


Рис. 37.

Решение. Введем систему координат с началом в точке R, направив координатные оси Oy и Oz вдоль ребер RP и RH соответственно и выбрав в качестве третьей оси Ox луч, лежащий в плоскости основания PQR и ортогональный ребру PR. Определим координаты вершин пирамиды и средних точек M и N:

$$H=(0,0,1),\quad R=(0,0,0),\quad P=(0,2\sqrt{2},0),\quad Q=(\sqrt{6},\sqrt{2},0),$$

$$M=\frac{R+Q}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{6},\sqrt{2},0),\quad N=\frac{P+Q}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{6},3\sqrt{2},0).$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми RN и HM найдем следующим образом: через прямую RN проведем плоскость Π, параллельную второй прямой HM и вычислим расстояние $\rho(HM,\Pi)$. Поскольку плоскость Π параллельна векторам $\overrightarrow{RN}$ и $\overrightarrow{HM}$, ее нормальный вектор $\vec{n}$ коллинеарен векторному произведению

$$\left[\overrightarrow{RN},\overrightarrow{HM}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \sqrt{6}/2 & 3\sqrt{2}/2 & 0\\ \sqrt{6}/2 & \sqrt{2}/2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{e}_1+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\vec{e}_2-\sqrt{3}\cdot\vec{e}_3=-\frac{1}{2}\Big(3\sqrt{2},-\sqrt{6},2\sqrt{3}\Big).$$

Следовательно, плоскость Π имеет уравнение $3\sqrt{2}x-\sqrt{6}y+2\sqrt{3}z+D=0$, в котором неизвестный коэффициент D равен нулю, так как Π проходит через начало координат R:

$$RN\subset\Pi\ \Rightarrow\ R\in\Pi\ \Rightarrow\ 3\sqrt{2}\cdot0-\sqrt{6}\cdot0+2\sqrt{3}\cdot0+D=0\ \Rightarrow\ D=0.$$

Прямая HM параллельна плоскости Π, поэтому искомая величина совпадает с расстоянием от любой точки прямой HM до плоскости Π. В частности,

$$\rho(HM,\Pi)=\rho(H,\Pi)=\frac{|3\sqrt{2}\cdot0-\sqrt{6}\cdot0+2\sqrt{3}\cdot1|}{\sqrt{18+6+12}}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\rho(RN,HM)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 5. Найти точку M, лежащую на сфере S и наиболее удаленную от плоскости Π, если

$$S:\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25,\quad \Pi:\ 3x-4z+49=0.$$

Решение. Ближайшая точка M лежит на пересечении сферы S и перпендикуляра OH, опущенного из ее центра на плоскость Π. Так как вектор $\overrightarrow{OH}$ и нормаль к плоскости $\vec{n}(3,0,-4)$ параллельны, то существует некоторое число t, такое, что $\overrightarrow{OH}=t\cdot\vec{n}$. Длина вектора $\overrightarrow{OH}$ совпадает с расстоянием от точки $O(1,-2,3)$ до плоскости Π и равна

$$\left|\overrightarrow{OH}\right|=\rho(O,\Pi)=\frac{|3\cdot 1-4\cdot 3+49|}{\sqrt{9+16}}=8.$$

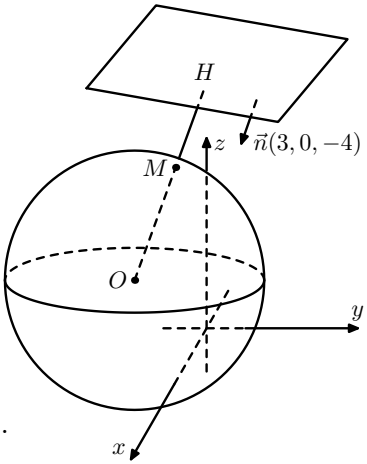


Рис. 38.

Следовательно, число t может быть найдено из следующего уравнения:

$$8=\left|\overrightarrow{OH}\right|=|t\cdot\vec{n}|=|t|\cdot\sqrt{25}=5|t|\quad\Leftrightarrow\quad t=\pm\frac{8}{5}.$$

Из рисунка видно, что векторы $\overrightarrow{OH}$ и $\vec{n}$ направлены в противоположные стороны, поэтому число t должно быть отрицательным. Отрезок OM является радиусом сферы, следовательно, его длина равна 5. Таким образом, мы можем определить искомое расстояние

$$\rho(O,\Pi)=MH=OH-OM=3$$

и координаты точки M:

$$OM:OH=5:8\ \Rightarrow\ \overrightarrow{OM}=\frac{5}{8}\cdot\overrightarrow{OH}=\frac{5}{8}\cdot t\cdot\vec{n}=\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\vec{n}=-\vec{n}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} = -\vec{n} \quad \Rightarrow \quad M = O - \vec{n} = (1,-2,3) - (3,0,-4) = (-2,-2,7).$$

Ответ: $M = (-2,-2,7)$.

Пример 6. Составить уравнение сферы S, проходящей через начало координат O и окружность

$$C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 25 \\ 2x-3y+5z-5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как сфера S принадлежит пучку сфер, проходящих через окружность C, то ее уравнение имеет вид

$$S: \ x^2+y^2+z^2-25+\lambda\cdot(2x-3y+5z-5) = 0,$$

в котором неизвестный параметр λ определяется из условия $O \in S$:

$$O \in S \ \Leftrightarrow \ 0^2+0^2+0^2-25+\lambda\cdot(2\cdot 0-3\cdot 0+5\cdot 0-5) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = -5.$$

Осталось лишь привести уравнение S к стандартному виду:

$$S: \ x^2+y^2+z^2-25-5(2x-3y+5z-5) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left(x^2-10x+25\right)+\left(y^2+15y+\frac{225}{4}\right)+\left(z^2-25z+\frac{625}{4}\right) = \frac{475}{2}.$$

Ответ: $S: \ (x-5)^2+(y+7{,}5)^2+(z-12{,}5)^2 = \frac{475}{2}$.

Пример 7. Сфера S, центр которой лежит на прямой

$$\begin{cases} 2x+4y-z-7 = 0 \\ 4x+5y+z-14 = 0, \end{cases}$$

касается плоскостей $\Pi_1: \ x+2y-2z-2 = 0$ и $\Pi_2: \ x+2y-2z+4 = 0$. Составить уравнение этой сферы.

Решение. Так как сфера касается параллельных плоскостей Π_1 и Π_2, ее центр лежит в плоскости Π, расположенной равноудаленно от Π_1 и Π_2. Ее уравнение представляет собой среднее арифметическое

$$\Pi:\ \frac{1}{2}\Big(x+2y-2z-2\Big)+\frac{1}{2}\Big(x+2y-2z+4\Big)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+2y-2z+1=0.$$

Следовательно, центр сферы $O(x_0, y_0, z_0)$ лежит в пересечении трех плоскостей Π_1, Π_2 и Π:

$$O:\ \begin{cases} 2x_0+4y_0-z_0-7=0 \\ 4x_0+5y_0+z_0-14=0 \\ x_0+2y_0-2z_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0=2x_0+4y_0-7 \\ 6x_0+9y_0-21=0 \\ -3x_0-6y_0+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_0=2x_0+4y_0-7=0 \\ -3y_0+9=0 \\ x_0=-2y_0+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=3 \\ z_0=3. \end{cases}$$

Диаметр сферы d равен расстоянию между плоскостями Π_1 и Π_2, которое можно найти, выбрав произвольную точку $A(2,1,1)$ на плоскости Π_1 и вычислив расстояние от нее до плоскости Π_2:

$$d=\rho(\Pi_1,\Pi_2)=\rho(A,\Pi_2)=\frac{|2+2-2+4|}{\sqrt{1+4+4}}=2 \quad\Rightarrow R=1.$$

Таким образом, уравнение сферы S имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1.$$

Ответ: $S:\ (x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1.$

Задачи для самостоятельной работы

136. Основанием пирамиды $HPQR$ служит равносторонний треугольник PQR, сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро HR

перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найти угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра QR, а другая — через точку R и середину ребра PQ.

137. Найти угол между прямой, образованной пересечением плоскостей $\Pi_1 : 2x - y - 3z + 5 = 0$, $\Pi_2 : x + y - 2 = 0$, и плоскостью, проходящей через точки $M(-2, 0, 3)$, $N(0, 2, 2)$ и $K(3, -3, 1)$.

138. Найти расстояние между прямыми AB и CD, если $A = (-3, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (-2, 2, 0)$ и $D = (1, 3, 2)$.

139. Для прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 3, BC = 2, CC_1 = 4$. На ребре AB взята точка M, причем $AM : BM = 1 : 2$. Найти расстояние и угол между прямыми D_1M и B_1K, где K — точка пересечения диагоналей грани CC_1D_1D.

140. Найти расстояние между двумя скрещивающимися медианами правильного тетраэдра со стороной a.

141. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2, 0, 3)$ и пересекающей прямые

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 \\ z = -2 + t \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} 2x - 2y - z - 4 = 0 \\ x + 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

142. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $4a$, боковое ребро равно a. Точки D и E — середины ребер A_1B_1 и BC. Отрезок MN с концами на прямых AC и BB_1 пересекает прямую DE и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

143. На ребрах AA_1, AB, B_1C_1, BC единичного куба $A \ldots D_1$ взяты точки K, L, M, N соответственно, так, что $AL = \frac{2}{3}$, $B_1M = \frac{1}{4}$, $CN = \frac{3}{10}$. Определить, какое из ребер, AB или AD, пересекает плоскость, параллельную отрезку ML и содержащую отрезок KN. В каком отношении это ребро делится плоскостью?

144. Найти угол между двумя скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра.

145. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z+2=0. \end{cases}$$

146. Проверить, пересекаются ли прямые

$$\begin{cases} 4x+z-1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x+y-z+4=0 \\ y+2z-8=0. \end{cases}$$

147. Найти проекцию точки $A(4,-3,1)$ на плоскость $x+2y-z-3=0$.

148. Написать уравнение сферы, проходящей через точку $M(0,-3,1)$ и пересекающей плоскость Oxy по окружности $x^2+y^2=16$.

149. Найти проекцию окружности

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=25 \\ 2x-y-2z-10=0 \end{cases}$$

на плоскость Oxz.

150. Найти уравнения плоскостей, которые касаются сферы

$$(x-4)^2+y^2+(z-2)^2=225$$

и параллельны плоскости $\Pi: 10x-11y-2z+3=0$.

151. Написать уравнение сферы, которая касается прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-6}{4}$ в точке $M(1,-4,6)$ и прямой $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-6}$ в точке $M(4,-3,2)$.

152. Написать уравнение сферы с центром в точке $C(4,5,-2)$, зная, что шар

$$x^2+y^2+z^2-4x-12y+36=0$$

касается ее с внутренней стороны.

11 Кривые и поверхности

Обсуждая метод координат, мы говорили о наиболее простых по строению геометрических объектах — прямых, плоскостях, окружностях и сферах. Следующим шагом в развитии описания этого метода служит его рассмотрение на примерах кривых и поверхностей. Этот материал по большей части относится к *дифференциальной геометрии* и будет затронут нами исключительно в целях демонстрации возможностей алгебраического аппарата.

Обобщением графика функции, как математического объекта, является понятие кривой (плоской или пространственной). Многие кривые — циклоида, спираль, винтовая линия — обладают ясными геометрическими образами. В то же время работа с ними требует кропотливых и объемных расчетов для нахождения стандартных характеристик, таких как, например, кривизна или кручение. Еще более трудоемким процессом становится дифференциальный анализ поверхностей. Помимо огромного разнообразия форм, геометрических особенностей и трудностей визуализации, он связан с огромным объемом многомерных вычислений. Поскольку даже поверхностное изложение упомянутых вопросов в рамках аналитической геометрии представляется невозможным, мы ограничимся некоторыми примерами. При рассмотрении кривых мы обсудим возможные способы их описания и понятие касательного вектора, а при выборе изучаемого класса поверхностей — остановимся на линейчатых.

Поверхность S, расположенная в пространстве $\mathbb{R}^3$ и образованная движением прямой линии l вдоль пространственной кривой c, называется *линейчатой*. Кривая c, определяющая траекторию движения и лежащая на S, служит ее *направляющей линией*, а все положения прямой l, полученные в ходе движения и составляющие S — *образующими линиями*. Типичными примерами линейчатых поверхностей являются цилиндры, образованные параллельным смещением прямой l вдоль кривой c, и конусы, образующие которого собираются в одной точке (см рисунок 39).

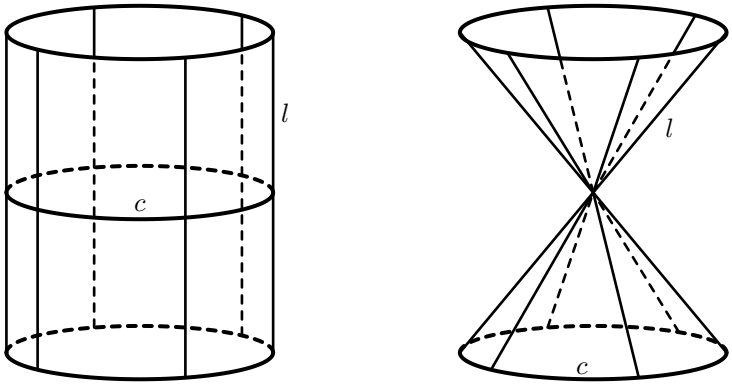


Рис. 39.

Помимо привычных глазу цилиндра и конуса, состоящих из прямолинейных образующих, существуют такие поверхности, описание которых прилагательным "линейчатая" кажется парадоксальным. К таковым, например, относится поверхность гиперболоида, отличительной особенностью которой является наличие в каждой точке двух прямолинейных образующих.

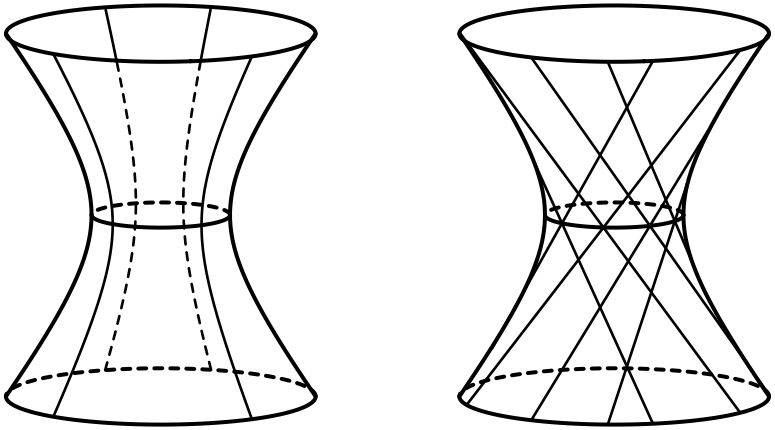


Рис. 40.

11.1 Описание пространственной кривой

Описание пространственной кривой в виде тройки координатных функций $\{x(t), y(t), z(t)\}$, определенных на промежутке I изменения параметра t, называется *параметрическим*. Окружность радиуса R, лежащая в координатной плоскости Oxy, может быть описана аналитически с помощью системы уравнений или параметрически в виде тройки координатных функций:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = 0; \end{cases} \qquad t \in I = [0, 2\pi).$$

Если пара координат (x, y) описывает окружность с радиусом R, а аппликата z линейно зависит от параметра, то результатом такого движения будет служить *винтовая линия*.

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \alpha \cdot t \end{cases}$$

$$\Big(t \in I = (-\infty, +\infty)\Big)$$

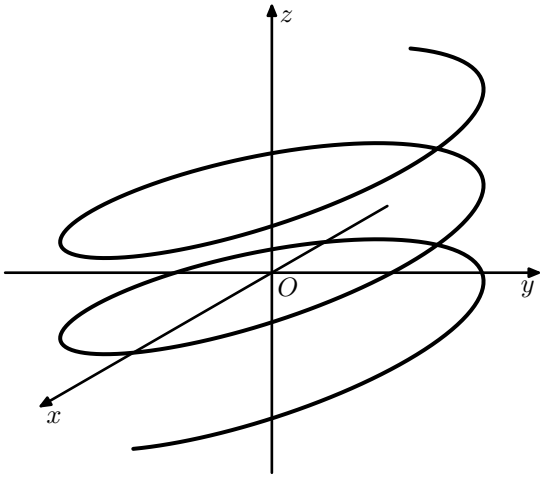


Рис. 41.

Рассмотрим пространственную кривую c и выберем на ней некоторую точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Она определяет пучок S прямых линий, состоящих из секущих кривой c, проходящих через точку M.

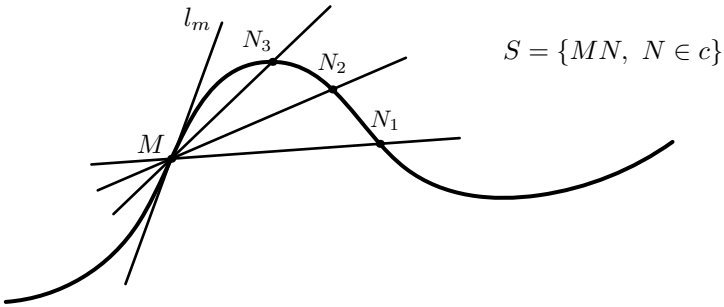


Рис. 42.

Пряма l_m, проходящая через точку M, называется *касательной* к кривой c, если она совпадает с предельным положением секущих MN при сближении точек M и N. Формальное определение касательной требует привлечения довольно сложного математического аппарата, поэтому мы ограничимся физическим уровнем строгости и будем писать $l_m = \lim\limits_{N \to M} MN$.

Лемма 11.1. *Пусть кривая имеет параметрическое описание*

$$\{x(t), y(t), z(t),\ t \in I\},$$

в котором тройка координатных функций дифференцируема в точке t_0 и обладает невырожденной производной:

$$\Big(x'(t_0)\Big)^2 + \Big(y'(t_0)\Big)^2 + \Big(z'(t_0)\Big)^2 \neq 0.$$

Тогда в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, соответствующей значению параметра $t_0 \in I$, вектор

$$\vec{v} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

является направляющим для касательной l_m.

□ Запишем условие дифференцируемости координатных функций в точке t_0

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)\cdot(t - t_0) + (t - t_0)\cdot\bar{o}(1),\ y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\cdot(t - t_0) +$$

$$+(t-t_0)\cdot\bar{o}(1),\ \ z(t)=z(t_0)+z'(t_0)\cdot(t-t_0)+(t-t_0)\cdot\bar{o}(1),\ \ t\to t_0$$

и представим его в векторном виде:

$$\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)=\Big(x(t_0),y(t_0),z(t_0)\Big)+\vec{v}\cdot(t-t_0)+(t-t_0)\cdot\bar{o}(1),\ \ t\to t_0.$$

Выберем на кривой точку N, соответствующую значению параметра t, близкому к t_0,

$$N=N(t)=\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)$$

и вычислим длину вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN}=\Big(x(t)-x(t_0),y(t)-y(t_0),z(t)-z(t_0)\Big)=(t-t_0)\cdot(\vec{v}+\bar{o}(1))\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad|\overrightarrow{MN}|=|t-t_0|\cdot|\vec{v}+\bar{o}(1)|=|t-t_0|\cdot|\vec{v}|\Big(1+\bar{o}(1)\Big),\quad t\to t_0.$$

Так как длина вектора $\vec{v}$ отлична от нуля, то направление секущей MN определяется частным

$$\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{(t-t_0)\cdot(\vec{v}+\bar{o}(1))}{|t-t_0|\cdot|\vec{v}|\Big(1+\bar{o}(1)\Big)}=sgn(t-t_0)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\Big(1+\bar{o}(1)\Big),\quad t\to t_0,$$

в котором sgn означает знак числа. Поскольку направляющий вектор прямой определяется с точностью до коэффициента пропорциональности, то множитель $sgn(t-t_0)$ в полученном выражении можно не учитывать. Следовательно, предельным положением секущих MN при сближении точек M и N будет служить прямая l_m с направляющим вектором $\vec{v}$. ■

Линейчатая поверхность S, образованная движением прямой l вдоль направляющей c, допускает параметрическое описание с участием двух параметров. Положение произвольной точки $M\in S$ характеризуется сдвигом u вдоль направляющей c и перемещением v вдоль образующей l. Иными словами, если тройки $\Big(f(u),g(u),h(u)\Big)$

и $\Big(a(u), b(u), c(u)\Big)$ определяют координатные функции кривой c и направляющего вектора прямой l, то поверхность S может быть описана в виде

$$x = f(u) + v \cdot a(u),\ y = g(u) + v \cdot b(u),\ z = h(u) + v \cdot c(u).$$

$\circlearrowleft$ Рассмотрим винтовую линию $c = (R\cos u, R\sin u, \alpha \cdot u)$ и проведем в каждой ее точке M касательную l_m с направляющим вектором

$$\vec{v} = \Big(R\cos u, R\sin u, \alpha \cdot u\Big)' = \Big(-R\sin u, R\cos u, \alpha\Big).$$

Полученная таким образом линейчатая поверхность S называется *разверткой касательных* и допускает следующее параметрическое представление:

$$x = R\cos u - Rv\sin u,\quad y = R\sin u + Rv\cos u,\quad z = \alpha u + \alpha v.\ \circlearrowright$$

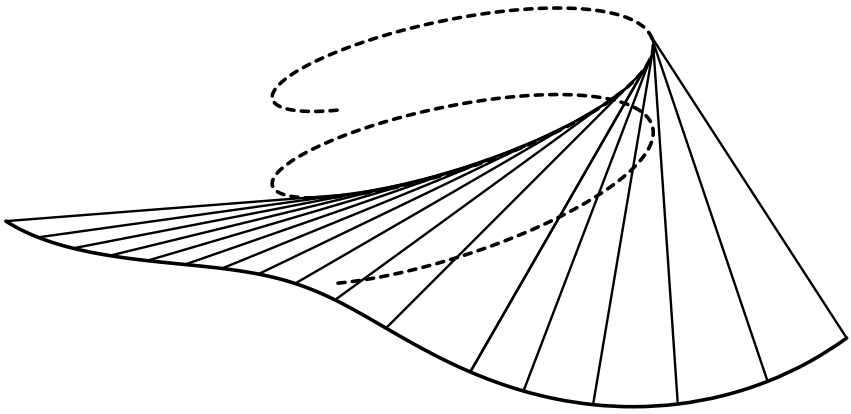


Рис. 43.

Развертки касательных, наряду с коническими и цилиндрическими поверхностями, образуют класс *развертывающихся поверхностей*, которые можно развернуть на плоскости без искажений и

растяжений. Это свойство, обусловленное кривизной поверхности, является исключительным. Например, кривизна сферы, не позволяющая ей развернуться на плоскости, приводит к искажению географических размеров при изображении земной поверхности в плоском атласе. Глобус в этом отношении дает более точное описание Земли.

11.2 Цилиндрические и конические поверхности

Рассмотрим два стандартных примера линейчатых поверхностей, прародителями которых являются известные из школьной программы круговые цилиндр и конус.

Линейчатая поверхность называется *цилиндрической*, если все ее образующие параллельны некоторой прямой. Поворотом системы координат можно совместить направление образующих цилиндрической поверхности S и оси Oz. В этом случае цилиндр S становится вертикальным и имеет характеристическую функциональную особенность при аналитическом описании.

Теорема 11.2. *Образующие цилиндра S параллельны оси Oz тогда и только тогда, когда поверхность S может быть описана аналитически уравнением $f(x, y) = 0$ со свободной переменной z.*

□ *Необходимость.* Рассмотрим плоскую кривую c, полученную при пересечении цилиндрической поверхности S и плоскости Oxy. Кривая c, лежащая в плоскости $\mathbb{R}^2$, допускает аналитическое описание в виде уравнения $f(x, y) = 0$. Покажем, что решением этого уравнения в пространстве $\mathbb{R}^3$ служит поверхность S.

Любая точка $M(x, y, z)$ цилиндра S лежит на образующей

$$l_m = M_0(x, y, 0) \ + \ t \cdot \vec{e}_z, \quad t \in \mathbb{R},$$

проходящей через точку $M_0(x, y, 0)$ кривой c. Так как координаты M_0 подчиняются равенству $f(x, y) = 0$, в котором переменная z является свободной, то координаты точки M также удовлетворяют данному уравнению. Следовательно, все точки поверхности S

включаются в решение уравнения $f(x,y)=0$. С другой стороны, каждое решение $M(x,y,z)$ уравнения $f(x,y)=0$ лежит на цилиндре S, так как получается из точки $M_0(x,y,0)$ сдвигом $z\cdot\vec{e}_z$ вдоль оси Oz. Таким образом, цилиндр S имеет аналитическое описание в виде уравнения $f(x,y)=0$.

Достаточность. Пусть поверхность S имеет аналитическое описание $f(x,y)=0$. Рассмотрим кривую c, лежащую в плоскости Oxy и определяемую тем же уравнением, и выберем ее в качестве направляющей. Тогда вся поверхность S состоит из вертикальных прямых

$$l_m = M_0(x,y,0) \ + \ t\cdot\vec{e}_z, \quad t\in\mathbb{R},$$

проходящих через точки $M_0(x,y,0)$ кривой c. Следовательно, поверхность S является цилиндрической. ■

↻ Уравнения $x^2-y^2=0$ и $x^2-y^2=1$ со свободной переменной z определяют в пространстве $\mathbb{R}^3$ цилиндрические поверхности — пару пересекающихся плоскостей и так называемый гиперболический цилиндр. ↺

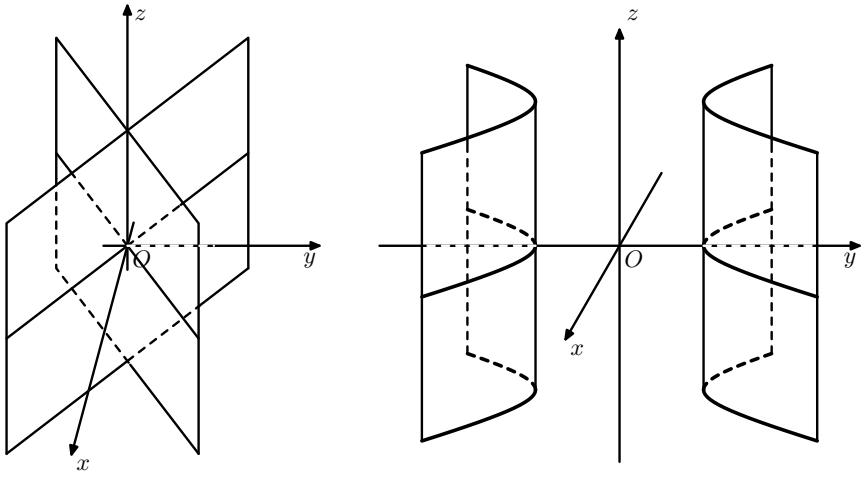


Рис. 44.

Линейчатая поверхность является *конической*, если все ее образующие проходят через одну точку, называемую *вершиной*. Если вершина конуса S находится в начале координат, то поверхность S имеет характерное аналитическое описание в виде однородного уравнения $f(x,y,z)=0$. Напомним, что функция трех переменных называется f *однородной* порядка α, если для любого числа $t\in\mathbb{R}$ и произвольной тройки (x,y,z) выполняется равенство

$$f(t\cdot x,\ t\cdot y, t\cdot z)=t^{\alpha}\cdot f(x,y,z).$$

Объем параллелепипеда со сторонами x, y и z (с учетом знака) представляет собой однородную функцию третьего порядка:

$$V(x,y,x)=xyz \quad\Rightarrow\quad V(t\cdot x,\ t\cdot y, t\cdot z)=(tx)\cdot(ty)\cdot(tz)=$$

$$=t^3\cdot(xyz)=t^3\cdot V(x,y,z).$$

Квадрат расстояния от произвольной точки $M(x,y,z)$ до начала координат является однородной функцией второго порядка:

$$\rho^2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \quad\Rightarrow\quad \rho^2(t\cdot x,\ t\cdot y, t\cdot z)=(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2=$$

$$=t^2\cdot(x^2+y^2+z^2)=t^2\cdot\rho^2(x,y,z).$$

Теорема 11.3. *Поверхность S представляет собой конус с вершиной в начале координат тогда и только тогда, когда она может быть описана однородным уравнением $f(x,y,z)=0$.*

□ *Необходимость*. Рассмотрим коническую поверхность S с вершиной в начале координат, имеющую (какое-то, возможно неоднородное) аналитическое описание $h(x,y,z)=0$, и покажем, что эта поверхность является решением некоторого однородного уравнения $f(x,y,z)=0$.

Определим функцию трех переменных $\mu(x,y,z)$, руководствуясь следующими правилами:

1) если числа x, y, z отличны от нуля или среди этих чисел лишь одно ненулевое, то $\mu(x,y,z)$ совпадает с количеством отрицательных чисел в тройке (x,y,z);

2) если одно из чисел равно нулю, а два других положительны, то $\mu(x,y,z)=0$; если одно из чисел равно нулю, а два других отрицательны, то $\mu(x,y,z)=1$;

3) если одно из чисел равно нулю, а два других противоположны по знаку, то $\mu(x,y,z)=\frac{1+sgn(a)}{2}$, где $sgn(a)$ — знак первого ненулевого числа в тройке (x,y,z);

4) если $x=y=z=0$, то $\mu(x,y,z)=0$.

При умножении аргументов (x,y,z) на положительное число t значение функции $\mu(x,y,z)$ остается неизменным. В случае, когда $t<0$, у целочисленной функция $\mu(x,y,z)$ меняется четность (исключение составляет начало координат $x=y=z=0$). Используя данное свойство функции μ, определим специальное расстояние (со знаком) от произвольной точки $M(x,y,z)$ до начала координат:

$$\rho(x,y,z)=(-1)^{\mu(x,\,y,\,z)}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Построенное расстояние обладает однородностью первой степени и позволяет ввести функцию f

$$f(x,y,z)=\begin{cases} h\left(\frac{x}{\rho},\ \frac{y}{\rho},\ \frac{z}{\rho}\right), & x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0, & x=y=z=0,\end{cases}$$

которая также является однородной с показателем $\alpha=0$:

$$f(tx,ty,tz) \;=\; \begin{cases} h\left(\frac{tx}{t\rho},\ \frac{ty}{t\rho},\ \frac{tz}{t\rho}\right), & x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0, & x=y=z=0\end{cases} \;=\; f(x,y,z).$$

Докажем, что уравнение $f(x,y,z)=0$ соответствует поверхности S.

Пусть точка $M(x_0, y_0, z_0)$, отличная от $O(0,0,0)$, принадлежит поверхности S. Рассмотрим образующую l_m, проходящую через начало координат, и выберем на ней точку N с координатами

$$N\left(\frac{x_0}{\rho},\ \frac{y_0}{\rho},\ \frac{z_0}{\rho}\right),\quad \rho\ =\ \rho(x_0, y_0, z_0).$$

Так как точка N также лежит на конусе S, имеет место следствие

$$h\left(\frac{x_0}{\rho},\ \frac{y_0}{\rho},\ \frac{z_0}{\rho}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0, y_0, z_0) = h\left(\frac{x_0}{\rho},\ \frac{y_0}{\rho},\ \frac{z_0}{\rho}\right) = 0.$$

Из этого ясно, что координаты произвольной точки конуса удовлетворяют уравнению $f(x, y, z) = 0$. С другой стороны, если координаты любой точки $M(x_0, y_0, z_0)$, отличной от начала координат, подчиняются равенству $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, то

$$h\left(\frac{x_0}{\rho},\ \frac{y_0}{\rho},\ \frac{z_0}{\rho}\right) = f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Это означает, что точка $N\left(\frac{x_0}{\rho},\ \frac{y_0}{\rho},\ \frac{z_0}{\rho}\right)$ лежит на поверхности S. Следовательно, исходная точка M, принадлежащая образующей, l_n также лежит на конусе.

Достаточность. Рассмотрим произвольную точку $M(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на поверхности S. Так как координаты точки M подчиняются равенству $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, то, в силу однородности функции f, все точки прямой

$$l_m = \{M_t = t \cdot (x_0, y_0, z_0),\quad t \in \mathbb{R}\}$$

также принадлежат S:

$$f(M_t) = f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^\alpha \cdot f(x_0, y_0, z_0) = t^\alpha \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, через каждую точку M поверхности S можно провести прямолинейную образующую l_m, проходящую через начало координат. Это означает, что поверхность S является конической, с вершиной в начале координат. ■

11.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Составить уравнение линии пересечения плоскости Oyz и сферы с центром в точке $A(8, 10, 12)$ и радиусом $R = 17$.

Решение. Линия пересечения сферы S и плоскости Π всегда представляет собой окружность c. Центр окружности B является основанием перпендикуляра, опущенного из центра сферы A на секущую плоскость, а ее радиус r может быть найден по теореме Пифагора: $R^2 = r^2 + AB^2$.

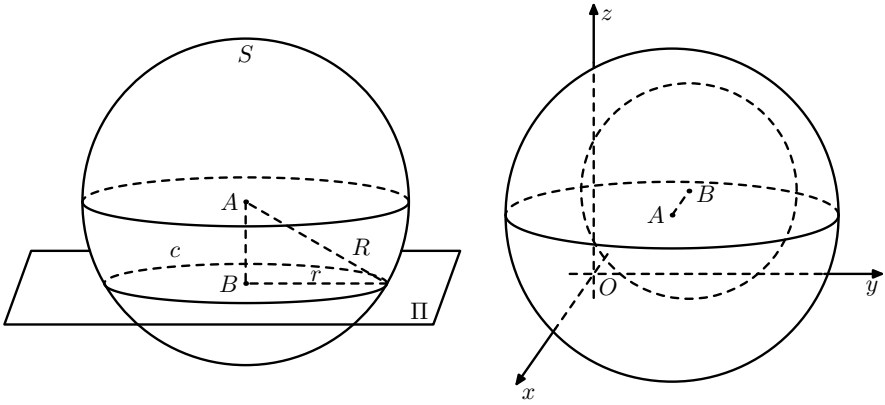


Рис. 45.

По условию, секущая плоскость совпадает с координатной $\Pi = Oyz$, поэтому проекция $A \to B$ производится вдоль оси Ox. При этом первая координата становится нулем, а вторая и третья сохраняются: $A(8, 10, 12) \to B(0, 10, 12)$. Следовательно, длина отрезка AB равна 8, а радиус искомой окружности r равен 15.

Так как окружность c лежит в координатной плоскости, определяемой уравнением $x = 0$, для ее описания достаточно найти параметрические функции $y(t)$ и $z(t)$. Для этого обратимся к плоскости Oyz, составим классическое уравнение окружности

$$c: \ (y-10)^2 + (z-12)^2 = 15^2,$$

а затем воспользуемся стандартной тригонометрической подстановкой:

$$(y-10)^2+(z-12)^2 = 15^2 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} y-10 = 15\cos t \\ z-12 = 15\sin t \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} y = 10+15\cos t \\ z = 12+15\sin t. \end{cases}$$

Добавив нулевую функцию $x \equiv 0$ и область изменения параметра t, получим искомое уравнение.

Ответ: $c = \{\ (0, 10+15\cos t, 12+15\sin t),\ t \in [0, 2\pi)\ \}$.

Пример 2. Кривая Вивиани образована пересечением сферы S с радиусом $2R$ и цилиндра C с радиусом R, проходящего через центр сферы. Написать параметрическое уравнение данной кривой.

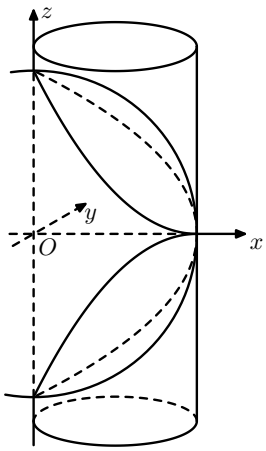


Рис. 46.

Решение. Поместим центр сферы S в начало координат O, а ось цилиндра C проведем через точку $(R, 0, 0)$ параллельно оси Oz.

Так как кривая Вивиани представляет собой пересечение цилиндра C и сферы S, то координаты всех ее точек удовлетворяют системе равенств

$$\begin{cases} (x-R)^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = (2R)^2. \end{cases}$$

Представим решение первого уравнения в параметрическом виде $\Big(t \in [0, 2\pi)\Big)$

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x-R = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$$

и используем второе уравнения для нахождения координаты z:

$$x^2+y^2+z^2=(2R)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Big(R(1+\cos t)\Big)^2+\Big(R\sin t\Big)^2+z^2=4R^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2R^2(1+\cos t)+z^2=4R^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4R^2\cos^2(t/2)+z^2=4R^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$z^2=4R^2\Big(1-\cos^2(t/2)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad z^2=\Big(2R\sin(t/2)\Big)^2.$$

Кривую Вивиани можно разбить на две ветви, одна из которых лежит выше координатной плоскости Oxy и удовлетворяет неравенству $z>0$, а другая — ниже плоскости Oxy и подчиняется условию $z<0$. Поэтому решение последнего уравнения можно записать двумя равноправными способами:

$$z=\pm 2R\sin(t/2), \quad t\in[0,2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad z=2R\sin(t/2), \quad t\in[0,4\pi).$$

Ответ: $\Big(R(1+\cos t), R\sin t, 2R\sin(t/2)\Big), \quad t\in[0,4\pi).$

Пример 3. Найти линию, по которой касательные к кривой c

$$x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=t^2$$

пересекают плоскость Oxy.

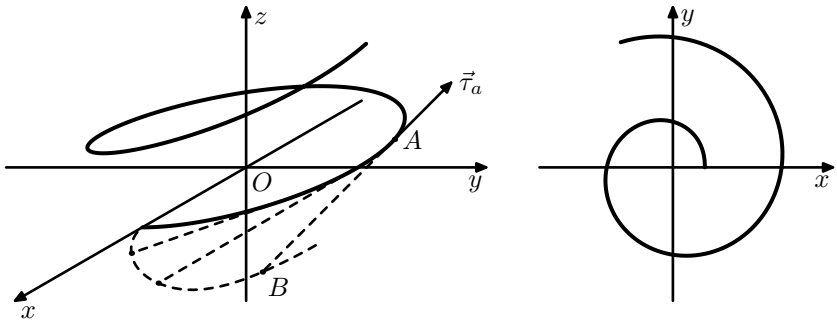


Рис. 47.

Решение. Выберем на кривой c произвольную точку $A(\cos t, \sin t, t^2)$ и вычислим координаты касательного вектора $\vec{\tau}_a$ в этой точке:

$$\vec{\tau}_a = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) = (-\sin t, \cos t, 2t).$$

Параметрическое уравнение касательной прямой, проведенной в точке A, имеет вид

$$\vec{r} = A + \lambda \cdot \vec{\tau}_a, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos t - \lambda \sin t,$$

$$y = \sin t + \lambda \cos t, \ z = t^2 + 2\lambda t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Точка пересечения касательной прямой и координатной плоскости Oxy имеет аппликату, равную нулю, поэтому соответствующий параметр λ находится из уравнения

$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 2\lambda t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -t/2.$$

Подставив найденное значение в параметрическое уравнение прямой, получим уравнение искомой кривой.

Ответ: $(\cos t + \frac{t}{2}\sin t, \sin t - \frac{t}{2}\cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$

Пример 4. Составить уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида, заданного уравнением $4x^2 - z^2 = y$, которые проходят через точку $M(1, 3, -1)$.

Решение. Введем обозначение $\vec{v} = (a, b, c)$ для направляющего вектора искомой образующей и составим ее параметрическое уравнение:

$$l: \ (x, y, z) = M + t \cdot \vec{v} \ \Leftrightarrow \ x = 1 + at, y = 3 + bt, z = -1 + ct, \ t \in \mathbb{R}.$$

Так как прямая l лежит на поверхности параболоида, то координаты всех ее точек удовлетворяют заданному в условии уравнению:

$$4x^2 - z^2 = y \quad \Leftrightarrow \quad (4a^2 - c^2)t^2 + (8a + 2c - b)t = 0.$$

Последнее равенство должно выполняться для любого значения параметра t. Следовательно, коэффициенты полученного квадратного трехчлена равны нулю:

$$\begin{cases} 4a^2 - c^2 = 0 \\ 8a + 2c - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \pm 2a \\ b = 8a + 2c. \end{cases}$$

Полученная система определяет два направляющих вектора:

$$\begin{cases} c = 2a \\ b = 12a \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 = a(1, 12, 2) \quad \text{и} \quad \begin{cases} c = -2a \\ b = 4a \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_2 = a(1, 4, -2).$$

Таким образом, через точку M проходят две прямолинейные образующие

$$l_1 : \ (x, y, z) = (1 + t, 3 + 12t, -1 + 2t), \ t \in \mathbb{R}, \qquad \text{и}$$

$$l_2 : \ (x, y, z) = (1 + t, 3 + 4t, -1 - 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $(1 + t, 3 + 12t, -1 + 2t)$ и $(1 + t, 3 + 4t, -1 - 2t), \ t \in \mathbb{R}$.

Пример 5. Найти площадь фигуры, образованной пересечением поверхности $S : \ x^2 + z^2 = 2z$ и плоскости $\Pi : \ y - z = 0$.

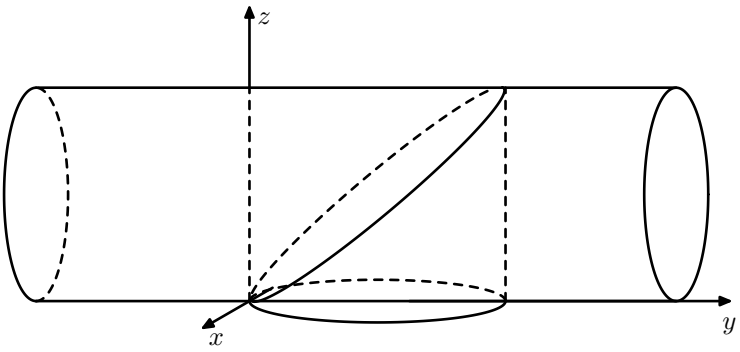


Рис. 48.

Решение. Перепишем уравнение поверхности в виде

$$f(x,z)=0,\quad f(x,z)=x^2+(z-1)^2=1.$$

Согласно лемме 11.2, данная поверхность представляет собой круговой цилиндр с осью $l \parallel Oy$. При сечении его плоскостью Π образуется эллипс, площадь которого мы найдем с помощью проектирования его на координатную плоскость Oxy.

Если обозначить буквой s искомую площадь, а s_{pr} — площадь проекции, то введенные величины будут связаны соотношением $s_{pr} = s\cdot\cos\alpha$, где $\alpha=\angle(\Pi,Oxy)=45^\circ$. Для вычисления s_{pr} сначала восстановим геометрический образ проекции и найдем его характеристики.

Пересечение Π и S описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x^2+(z-1)^2=1 \\ y=z \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=\cos t \\ y=1+\sin t \\ z=1+\sin t \end{cases},\quad t\in[0,2\pi).$$

При проектировании эллипса на плоскость Oxy первые две координаты точки остаются неизменными, а третья становится равной нулю. Таким образом, проекция эллипса имеет уравнение

$$x=\cos t,\quad y=1+\sin t,\quad z=0,\quad t\in[0,2\pi),$$

которое описывает окружность с радиусом, равным единице. Заключительные вычисления приводят нас к ответу:

$$s_{pr}=\pi \quad\Rightarrow\quad s=\frac{s_{pr}}{\cos\alpha}=\frac{\pi}{1/\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi.$$

Ответ: $s=\sqrt{2}\pi$.

Пример 6. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого задана уравнениями

$$x^2-2z+1=0, y-z+1=0.$$

Решение. Обозначим направляющую через c, поверхность конуса — через K, а начало координат — через O. Любая точка $M(x,y,z)$, лежащая на кривой c, удовлетворяет системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-2z+1=0 \\ y-z+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2z=x^2+1 \\ y=z-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\frac{x^2+1}{2} \\ y=\frac{x^2-1}{2}. \end{array}\right.$$

Переменная x в данном случае выступает в роли свободной, поэтому мы можем выписать параметрическое уравнение c:

$$M(x,y,z)\in c \quad\Leftrightarrow\quad (x,y,z)=\left(t,\frac{t^2-1}{2},\frac{t^2+1}{2}\right), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Точка $P(x,y,z)$ лежит на поверхности конуса K только в том случае, когда найдется $M\in c$, такая, что $P\in OM$. Запишем с привлечением координат последнее условие:

$$P\in OM \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{OP}=\lambda\cdot\overrightarrow{OM} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x=\lambda t \\ y=\lambda\cdot\frac{t^2-1}{2} \\ z=\lambda\cdot\frac{t^2+1}{2} \end{array}\right. \quad (\lambda,t\in\mathbb{R}).$$

Выразим свободные переменные λ и t из последних двух уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} y=\lambda\cdot\frac{t^2-1}{2} \\ z=\lambda\cdot\frac{t^2+1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z-y=\lambda \\ z(t^2-1)=y(t^2+1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z-y=\lambda \\ t^2(z-y)=z+y \end{array}\right.$$

и преобразуем первое:

$$x=\lambda t \;\Rightarrow\; x^2=\lambda^2t^2=(z-y)^2\cdot t^2=(z-y)\cdot(z+y)=z^2-y^2.$$

Полученное равенство является однородным уравнением второй степени и представляет собой аналитическое описание поверхности K.

Ответ: $x^2+y^2=z^2$.

Пример 7. Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\vec{v} = (2, -3, 4)$, а направляющая задана уравнениями $x^2 + y^2 = 9, z = 1$.

Решение. Обозначим направляющую окружность через c, а поверхность цилиндра — через C. Используя аналитическое описание кривой c, запишем ее параметрическое уравнение:

$$M(x,y,z) \in c \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Любая точка P цилиндрической поверхности C лежит на некоторой прямой с начальной точкой $M \in c$ и направляющим вектором $\vec{v}$. Запишем с привлечение координат сформулированное условие:

$$P(x,y,z) \in C \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MP} = \lambda \cdot \vec{v} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 3\cos t + 2\lambda \\ y = 3\sin t - 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}, \quad \begin{matrix} t \in [0, 2\pi), \\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{matrix}$$

Выразим свободную переменную λ из последнего уравнения и подставим в первые:

$$\lambda = \frac{z-1}{4} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 3\cos t + \frac{z-1}{2} \\ y = 3\sin t - \frac{3z-3}{4} \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \cos t = \frac{2x-z+1}{6} \\ \sin t = \frac{4y+3z-3}{12} \end{cases}.$$

Запишем искомое уравнение поверхности C, использовав основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 t + \sin^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{(2x-z+1)^2}{36} + \frac{(4y+3z-3)^2}{144} = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 4(2x-z+1)^2 + (4y+3z-3)^2 = 144.$$

Остается лишь раскрыть скобки и привести подобные.

Ответ: $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0$.

Задачи для самостоятельной работы

153. На кривой $(x, y, z) = (t, t^2, t^3),\ t \in \mathbb{R}$, найти точку, касательная в которой параллельна плоскости $x + 2y + z - 4 = 0$.

154. Написать уравнение касательной, проведенной к окружности $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x + y + z = 0$ в точке $M(1, -2, 1)$.

155. Доказать, что касательная к винтовой линии

$$(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t),\ t \in \mathbb{R},$$

образует постоянный угол с осью Oz.

156. Доказать, что кривая $(x, y, z) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t),\ t \in \mathbb{R}$, пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под одним и тем же углом.

157. Составить параметрическое уравнение линии пересечения сферы с радиусом, равным 5, центр которой находится в начале координат, с плоскостью, параллельной плоскости Oxz и лежащей в левом полупространстве $(y < 0)$ на расстоянии двух единиц от нее.

158. Составить параметрическое уравнение линии пересечения двух сфер: первая с радиусом, равным 6, и центром в начале координат, вторая с радиусом, равным 5, и центром в точке $C(1, -2, 2)$.

159. Доказать, что плоскость $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ по прямолинейным образующим. Составить уравнения этих прямых.

160. Составить уравнения прямолинейных образующих поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, параллельных плоскости $4x - 5y - 10z - 20 = 0$.

161. Убедившись, что точка $A(-2, 0, 1)$ лежит на поверхности, заданной уравнением $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$, определить угол между ее прямолинейными образующими.

162. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(3, -1, -2)$, а направляющая задана уравнениями

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, x - y + z = 0.$$

163. Прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ является осью кругового конуса, вершина которого лежит на плоскости Oxy. Составить уравнение этого конуса, зная, что точка $M(1; 1; -2, 5)$ лежит на его поверхности.

164. Составить уравнение конуса с вершиной в точке $(5, 0, 0)$, образующие которого касаются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

165. Составить уравнение цилиндра, направляющая которого задана уравнениями $x^2 - y^2 = z$, $x + y + z = 0$, а образующие перпендикулярны к плоскости направляющей.

166. Цилиндр, образующие которого перпендикулярны плоскости $x + y - 2z - 5 = 0$, описан около сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Составить уравнение этого цилиндра.

167. Составить уравнение кругового цилиндра, проходящего через точку $(2, -1, 1)$, если его осью служит прямая

$$l: \ x = 1 + 3t, y = -2 - 2t, z = 2 + t.$$

12 Геометрия эллипса и гиперболы

Основным инструментом аналитической геометрии, как уже отмечалось, можно назвать алгебраическое описание линий, фигур и областей. В этой науке сложность уравнения или неравенства всегда отражает его содержательность. Например, прямая, допускающая простейшее представление в виде линейного уравнения, имеет довольно узкий спектр свойств. В то же время окружность или парабола, соответствующие уравнениям второй степени, обладают богатой геометрией.

Уравнения второго порядка и порожденные ими кривые стали по-настоящему классическим объектом изучения в математике. К ним, помимо упомянутых выше, относятся также эллипс (представляющий собой растяжение окружности) и гипербола. Другими примерами могут служить пары параллельных или пересекающихся прямых. Продолжение этого списка с полной классификацией будет представлено ниже.

Кривые второго порядка, несмотря на название, бесспорно, имеют геометрические корни, и оставить их без внимания было бы несправедливым. Ниже будут представлены геометрические определения эллипса и гиперболы, а также их некоторые следствия, полученные методами элементарной математики.

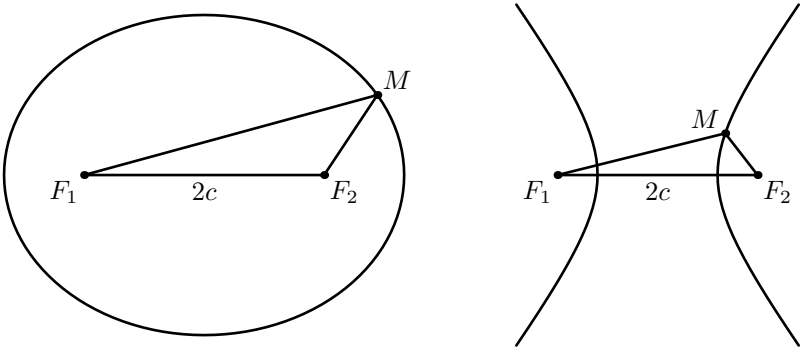


Рис. 49.

Определение. Пусть F_1, F_2 — точки на плоскости, расстояние между которыми равно $2c$. *Эллипсом (гиперболой)* с фокусами F_1, F_2, называется геометрическое место точек M, таких, что сумма расстояний $MF_1 + MF_2$ (модуль разности расстояний $|MF_1 - MF_2|$) постоянна, и равна $2a$, где $a > c$ ($a < c$).

Если фокусы F_1 и F_2 попадают в одну точку O, то, согласно определению, эллипс превращается в окружность с центром в O. В этом случае отрезки MF_1 и MF_2 становятся радиусами окружности, а определяющее эллипс расстояние $2a$ совпадает с диаметром. Проводя аналогию с окружностью, отрезки MF_1 и MF_2 для произвольного эллипса называются *фокальными радиусами*. То же название используется и для гиперболы.

Лемма 12.1. *Прямая F_1F_2, а также серединный перпендикуляр $l^\perp$ отрезка F_1F_2 являются осями симметрии для эллипса и гиперболы с фокусами, расположенными в точках F_1, F_2.*

□ Пусть точка M лежит на эллипсе(гиперболе), а точки M' и M'' симметричны M относительно прямых F_1F_2 и $l^\perp$ соответственно.

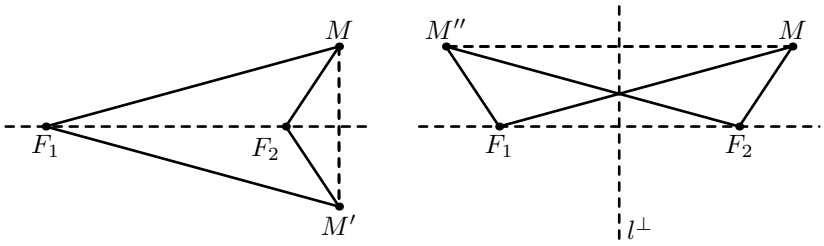


Рис. 50.

В силу симметрии,

$$MF_1 = M'F_1, \quad MF_2 = M'F_2 \quad \text{и} \quad MF_1 = M''F_2, \quad MF_2 = M''F_1.$$

Следовательно, имеют место следующие равенства для суммы фокальных радиусов

$$M'F_1 + M'F_2 = M''F_1 + M''F_2 = MF_1 + MF_2,$$

а также для модуля их разности:

$$|M'F_1 - M'F_2| = |M''F_1 - M''F_2| = |MF_1 - MF_2|.$$

Таким образом, точки M' и M'' лежат на эллипсе (гиперболе). ■

Точка пересечения осей симметрий F_1F_2 и $l^\perp$ является центром симметрии эллипса/гиперболы и называется его/ее *центром*. Диаметром эллипса, как и диаметром окружности, мы будем называть любую хорду, проходящую через его центр.

↻ В качестве примера рассмотрим эллипс с фокусами $F_1(5,-1)$ и $F_2(2,3)$, на котором лежит точка $M(4,6)$. Через данную точку проведем диаметр MM' и определим координаты точки M'.

Центр эллипса O, являясь серединой отрезка F_1F_2 имеет координаты $O\left(\frac{7}{2},1\right)$. Координаты точки M' определим из следующего векторного соотношения:

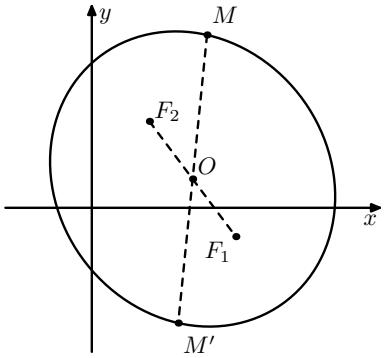


Рис. 51.

$$M'M = 2OM \quad \Rightarrow M' = 2O - M = 2\cdot\left(\tfrac{7}{2},1\right) - (4,6) = (3,-4). \ \circlearrowleft$$

12.1 Каноническая система координат

Система координат, в которой начало совпадает с центром эллипса (гиперболы), а оси Ox и Oy направлены вдоль осей симметрии, называется *канонической* для данного эллипса (гиперболы).

Как и в случае параболы, каноническая система координат позволяет максимально упростить аналитическое описание кривой.

Теорема 12.2. *Пусть F_1 и F_2, расположенные на расстоянии $2c$ друг от друга, являются фокусами эллипса/гиперболы с определяющим расстоянием $2a$. Тогда в канонической системе координат имеют место уравнения*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{— для эллипса,} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{— для гиперболы,}$$

в которых параметр b подчиняется равенствам $a^2-c^2=b^2$ и $c^2-a^2=b^2$ соответственно.

□ Доказательства теоремы для эллипса и гиперболы по сути идентичны, поэтому мы ограничимся рассмотрением первой кривой. Фокусы эллипса в канонической системе координат расположены в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, поэтому условие $MF_1+MF_2=2a$ для произвольной точки эллипса $M(x,y)$ равносильно равенству

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Перенесем второй корень в правую часть равенства и возведем обе части в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc.$$

Обе части полученного уравнения еще раз возведем в квадрат и приведем подобные:

$$a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Поделив последнее равенство на его правую часть и использовав определяющее равенство для параметра b, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \ \blacksquare$$

Эллипс отсекает от осей канонической системы координат два отрезка длиной $2a$ и $2b$, которые являются его наибольшей и наименьшей хордой. Поэтому канонические параметры a и b называются *большой и малой полуосью* эллипса. Гипербола пересекается лишь с одной осью канонической системы, поэтому для нее эти числа называются *действительной и мнимой полуосью*. В случае равенства $a = b$, эллипс превращается в окружность, а гипербола становится *равносторонней*. Любая гипербола обладает двумя асимптотами, уравнения которых в канонической системе координат имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{b}{a}\cdot x.$$

Простейшие уравнения эллипса и гиперболы, полученные с помощью канонической системы координат, позволяют описать эти кривые в параметрической форме. Из основного тригонометрического тождества следует, что для любой точки $M(x, y)$, лежащей на эллипсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

найдется угол $t \in [0, 2\pi)$, такой, что

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t.$$

Из этого следует, что эллипс с полуосями a и b в канонической системе координат можно описать в виде

$$x = a\cdot\cos t, \quad y = b\cdot\cos t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Для параметрического описания гиперболы используются специальные функции — гиперболические синус sh и косинус ch:

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Они подчиняются основному гиперболическому тождеству

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

и обладают свойствами, аналогичными тригонометрическим. Например, для них справедливы формулы двойного угла

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad \operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t,$$

и следующие правила для вычисления производных:

$$\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t, \quad \operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t.$$

Согласно основному равенству, для любой точки $M(x, y)$ гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

найдется число $t \in (-\infty, +\infty)$, такое, что

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t \qquad \text{или} \qquad x = -a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t.$$

Последние пары уравнений относятся к разным веткам гиперболы и представляют собой ее параметрическое представление.

Параметрическая форма уравнений эллипса и гиперболы позволяет осуществлять геометрические вычисления, связанные с производной. Согласно лемме 11.1, касательный вектор, приложенный в точке $M(x(t_0),\ y(t_0))$, имеет координаты $\vec{v}(x'(t_0),\ y'(t_0))$, а касательная прямая описывается уравнением

$$x'(t_0) \cdot (y - y(t_0)) = y'(t_0) \cdot (x - x(t_0)).$$

$\circlearrowleft$ Рассмотрим гиперболу, заданную в канонической системе координат уравнением $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, и найдем угол между касательными, проходящими через точки M и N этой гиперболы с ординатой 2. Предположим для определенности, что точка M лежит на правой ветке, а N — на левой, и определим абсциссы данных точек, используя каноническое уравнение гиперболы:

$$\begin{cases} \frac{x_m^2}{9} - \frac{y_m^2}{4} = 1 \\ y_m = 2,\ x_m > 0 \end{cases}, \begin{cases} \frac{x_n^2}{9} - \frac{y_n^2}{4} = 1 \\ y_n = 2,\ x_n < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M(3\sqrt{2}, 2) \\ N(-3\sqrt{2}, 2) \end{cases}.$$

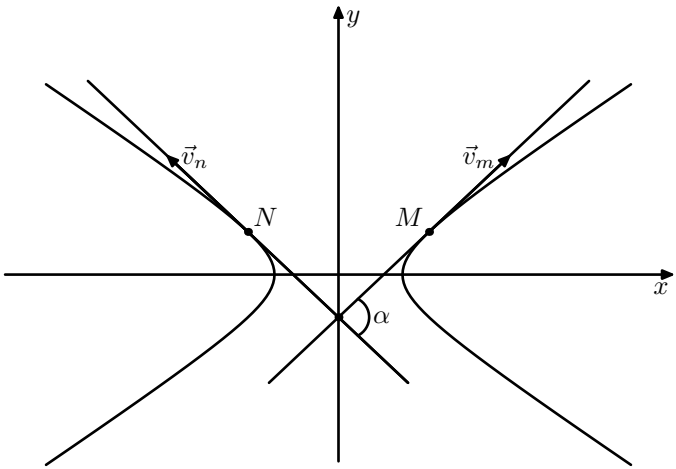


Рис. 52.

Правая ветвь гиперболы имеет описание

$$\begin{cases} x = 3\operatorname{ch} t \\ y = 2\operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{а левая} - \quad \begin{cases} x = -3\operatorname{ch} s, \\ y = 2\operatorname{sh} s, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, точки M и N соответствуют значениям параметров t_m и s_n, в которых гиперболические функции имеют значения

$$\operatorname{ch} t_m = \operatorname{ch} s_n = \sqrt{2} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{sh} t_m = \operatorname{sh} s_n = 1.$$

Определим направление касательных линий, вычислив производные в точках t_m и s_n:

$$\vec{v}_m = (3\operatorname{sh} t_m, 2\operatorname{ch} t_m) = (3, 2\sqrt{2}), \vec{v}_n = (-3\operatorname{sh} s_n, 2\operatorname{ch} s_n) = (-3, 2\sqrt{2}).$$

Наконец, определим искомый угол, используя свойство скалярного произведения:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{v}_m, -\vec{v}_n)}{|\vec{v}_m| \cdot |\vec{v}_n|} = \frac{1}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} = \frac{1}{17} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{1}{17}. \ \circlearrowleft$$

12.2 Оптическое свойство

Фокусы среди всех точек плоскости имеют особое расположение относительно эллипса и гиперболы и связаны со многими замечательными свойствами этих кривых. Остановимся на одном из них, *оптическом*, которое раскрывает физический смысл термина "фокус". Для доказательства оптического свойства нам потребуются вспомогательные геометрические леммы.

Рассмотрим две точки плоскости A и B, лежащие по одну сторону от некоторой прямой XY. Согласно принципу Ферма, луч света, следующий из точки A в точку B с отражением от прямой XY, выбирает кратчайший из всех возможных путей.

Лемма 12.3. *Пусть M — некоторая точка прямой XY. Длина пути AMB, равная $AM + MB$, будет кратчайшей в том случае, когда угол падения $\angle AMX$ равен углу отражения BMY.*

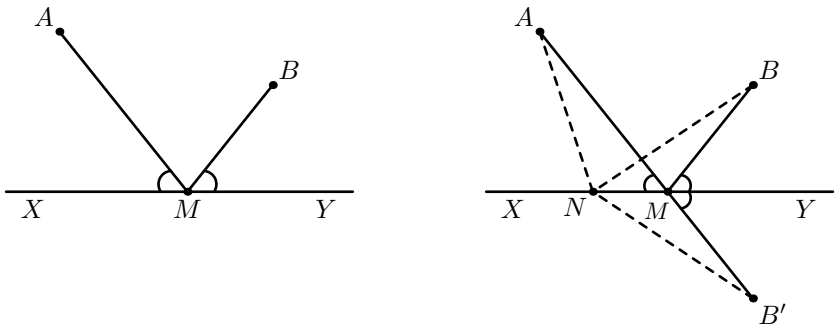


Рис. 53.

□ Рассмотрим точку B', симметричную B относительно прямой l, и обозначим через M точку пересечения прямых AB' и l. Углы $\angle AMX$ и $\angle B'MY$ равны как вертикальные, а углы $\angle BMY$ и $\angle B'MY$ равны в силу симметрии. Следовательно, в точке M угол падения равен углу отражения.

Зафиксируем произвольную точку N на прямой XY и докажем, что длина ANB больше длины AMB. Так как точки B и B' симметричны относительно прямой XY,

$$AM + MB = AM + MB' = AB' \qquad \text{и} \qquad AN + NB = AN + NB'.$$

По неравенству треугольника, сумма двух сторон $AN+NB'$ больше третьей AB', поэтому

$$AN + NB = AN + NB' > AB' = AM + MB' = AM + MB. \blacksquare$$

Аналогичное свойства имеет место и в том случае, когда точки A и B лежат по разные стороны от прямой XY.

Лемма 12.4. *Рассмотрим точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой XY, притом $\rho(A, XY) \neq \rho(B, XY)$, и пусть M — некоторая точка прямой XY. Тогда модуль разности длин $|AM - MB|$ будет наибольшим в том случае, когда отрезки AM и MB составляют равные углы с прямой XY.*

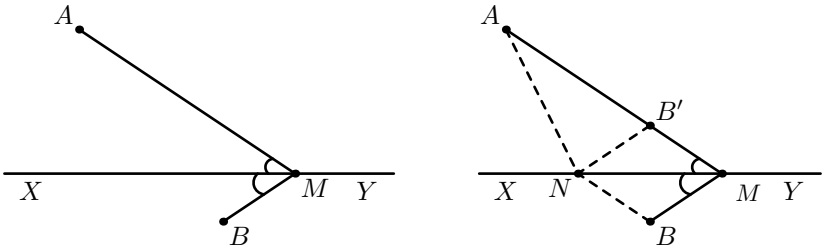


Рис. 54.

□ Рассмотрим точку B', симметричную B относительно прямой l, и обозначим буквой M точку пересечения прямых AB' и l (данные прямые пересекаются в силу условия $\rho(A, XY) \neq \rho(B, XY)$). Углы $\angle AMX$ и $\angle BMX$ равны в силу симметрии. Следовательно, отрезки AM и MB составляют равные углы с прямой XY.

Зафиксируем произвольную точку N на прямой XY и докажем, что модуль разности $|AN - NB|$ меньше, чем $|AM - MB|$.

Так как точки B и B' симметричны относительно прямой XY,

$$|AM-MB| = |AM-MB'| = AB' \qquad \text{и} \qquad |AN-NB| = |AN-NB'|.$$

По неравенству треугольника, модуль разности сторон $|AN - NB'|$ меньше третьей $|AB'|$, поэтому

$$|AN - NB| = |AN - NB'| < AB' = |AM - MB'| = |AM - MB|. \blacksquare$$

Теорема 12.5. *Пусть F_1 и F_2 — фокусы эллипса или гиперболы, а M — произвольная точка этой кривой. Тогда касательная l, проведенная в точке M, составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M и F_2M.*

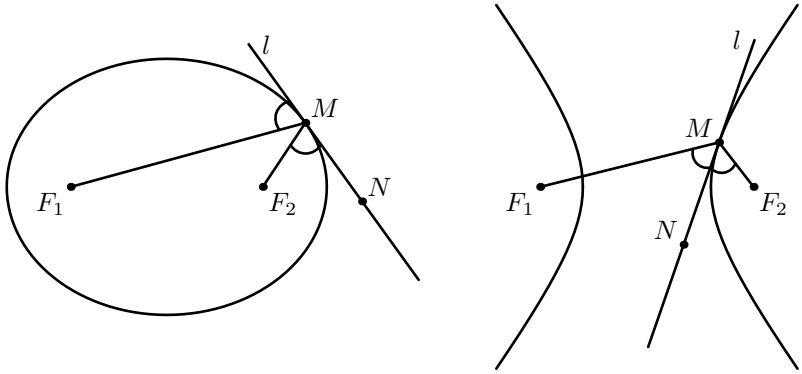


Рис. 55.

□ Обозначим через a большую (действительную) полуось эллипса/гиперболы и рассмотрим произвольную точку N, лежащую на касательной l. Так как данная точка лежит вне эллипса/гиперболы, для длин отрезков NF_1 и NF_2 выполняются неравенства:

$$NF_1 + NF_2 > 2a = MF_1 + MF_2 \text{— для эллипса,}$$

$$|NF_1 - NF_2| < 2a = |MF_1 - MF_2| — \text{для гиперболы.}$$

Следовательно, точка M (среди всех точек прямой l) реализует минимум суммы расстояния $NF_1 + NF_2$ в случае эллипса и максимум модуля разности расстояний $|NF_1 - NF_2|$ в случае гиперболы. Согласно лемме 12.3/лемме 12.4, отрезки F_1M и F_2M составляют равные углы с прямой l. ■

Согласно оптическому свойству, луч света, выпущенный из фокуса F_1 эллиптического зеркала, после отражения пройдет через другой его фокус F_2. Отразившись второй раз, он вернется в исходную точку F_1, и так далее. Можно доказать, что после многократного отражения, луч окажется "зажатым" между вершинами эллипса, лежащими на большой оси.

12.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Составить уравнения эллипса e в канонической системе координат, если известно, что он проходит через точки $M(4, -\sqrt{3})$ и $N(2\sqrt{2}, 3)$.

Решение. Уравнение эллипса в канонической системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Так как эллипс продит через точки M и N, координаты этих точек должны удовлетворять указанному уравнению:

$$M \in e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4^2}{a^2} + \frac{(-\sqrt{3})^2}{b^2} = 1, \quad N \in e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2\sqrt{2})^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1.$$

Объединим уравнения в одну систему и найдем ее решение:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{4^2}{a^2}+\frac{(-\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \\ \frac{(2\sqrt{2})^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{16}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1 \\ \frac{8}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2=20 \\ b^2=15 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$.

Пример 2. Найти расстояние от фокуса гиперболы до асимптоты.

Решение. Рассмотрим каноническую систему координат гиперболы h и запишем в ней уравнение кривой h и ее асимптот $l_{1,2}$:

$$h:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad l_{1,2}:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad ay \pm bx = 0.$$

Фокусы гиперболы $F_{1,2}$ имеют координаты

$$F_{1,2}=(\pm c, 0) \quad \Leftrightarrow \quad F_{1,2}=(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0),$$

поэтому расстояния от них до асимптот совпадают с мнимой полуосью:

$$\rho(F_1,l_1)=\rho(F_1,l_2)=\rho(F_2,l_1)=\rho(F_2,l_2)=\frac{|a\cdot 0 \pm b\cdot c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b.$$

Ответ: искомое расстояние равно мнимой полуоси.

Пример 3. Составить уравнение гиперболы h, если известно, что угол между ее асимптотами равен 90°, а фокусы расположены в точках $F_1(4,-4)$ и $F_2(-2,2)$.

Решение. Рассмотрим уравнение гиперболы и ее асимптот l_1 и l_2 в канонической системе координат Suv:

$$h:\ \frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}=1, \qquad l_1:\ v=\frac{b}{a}\cdot u, \qquad l_2:\ v=-\frac{b}{a}\cdot u.$$

Если обозначить через α угол наклона прямой l_1 к оси Su, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\angle(l_1, l_2) = 2\alpha$. Следовательно, асимптоты пересекутся под прямым углом лишь в том случае, когда

$$\alpha = 45^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = b.$$

Другими словами, искомая гипербола является равносторонней. Зная фокальное расстояние

$$2c = F_1F_2 = \sqrt{(4+2)^2 + (-4-2)^2} = 6\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad c = 3\sqrt{2},$$

найдем мнимую и действительную полуоси:

$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 = 18 \\ a = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 3.$$

Теперь выведем уравнение гиперболы, использовав определение:

$$M(x,y) \in h \quad \Leftrightarrow \quad |MF_1 - MF_2| = 2a \quad \Leftrightarrow \quad MF_1 - MF_2 = \pm 2a \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-4)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} \pm 6 \quad \Rightarrow$$

$$(x-4)^2 + (y+4)^2 = (x+2)^2 + (y-2)^2 \pm 12\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} + 36 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -x + y - 1 = \pm\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} \quad \Rightarrow \quad 2xy + 2x - 2y + 7 = 0.$$

Ответ: $h:\ 2xy + 2x - 2y + 7 = 0.$

Пример 4. Определить при каких значениях параметра m прямая $l:\ y = -x + m$ касается эллипса $e:\ \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Решение. Прямая l касается эллипса e тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} y = -x + m \\ \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Подставив выражение для переменной y во второе равенство, мы получим квадратное уравнение относительно неизвестной x:

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+4y^2=20 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+4(-x+m)^2=20.$$

Единственность решения этого уравнения равносильно единственности решения исходной системы и достигается при условии равенства дискриминанта нулю:

$$D=0 \quad\Leftrightarrow\quad 16m^2-5(4m^2-20)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4m^2=100 \quad\Leftrightarrow\quad m=\pm 5.$$

Ответ: $m=\pm 5$.

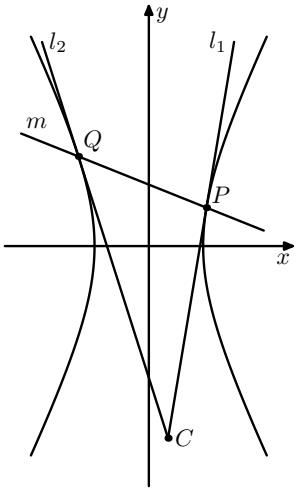


Рис. 56.

Пример 5. Из точки $C(1,-10)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$. Составить уравнение хорды m, соединяющей точки касания.

Решение. Рассмотрим уравнение прямой $l:\ y=kx+b$ и определим значения параметров k и b, при которых прямая l пройдет через точку C, коснувшись гиперболы. Так как $C\in l$,

$$y_c=k\cdot x_c+b \Leftrightarrow -10=k+b \Leftrightarrow b=-k-10.$$

С другой стороны, прямая l касается гиперболы, поэтому соответствующая система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1 \\ y=kx+b \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 4x^2-(kx-k-10)^2=32 \\ y=kx-k-10 \end{cases}.$$

Это возможно лишь в том случае, когда дискриминант первого уравнения обращается в нуль:

$$D=0 \;\Leftrightarrow\; k^2(k+10)^2+(4-k^2)(k^2+20k+132)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; k^4+20k^3+100k^2-k^4-20k^3-128k^2+80k+528=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 7k^2-20k-132=0 \;\Leftrightarrow\; k=6 \quad \text{или} \quad k=-22/7.$$

Таким образом, получаем два возможных положения прямой l —

$$\left\{\begin{array}{l} k=6 \\ b=-16 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} k=-22/7 \\ b=-48/7 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} l_1:\; y=6x-16 \\ l_2:\; y=-\frac{1}{7}\big(22x+48\big). \end{array}\right.$$

и две точки касания —

$$P:\; \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1 \\ y=6x-16 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad Q:\; \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1 \\ y=-\frac{22x+48}{7} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P=(3,2) \\ Q=\big(-\frac{11}{3},\frac{14}{3}\big) \end{array}\right. .$$

Найдем уравнение искомой прямой PQ:

$$M(x,y)\in PQ \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MP}\parallel\overrightarrow{QP} \;\Leftrightarrow\; \frac{x-3}{-11/3-3}=\frac{y-2}{14/3-2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{x-3}{-20}=\frac{y-2}{8} \;\Leftrightarrow\; \frac{x-3}{-5}=\frac{y-2}{2} \;\Leftrightarrow\; 2x+5y-16=0.$$

Ответ: $m:\; 2x+5y-16=0.$

Пример 6. Из левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ под тупым углом α к оси Ox направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Дойдя до эллипса, луч отразился от него. Составить уравнение прямой m, на которой лежит отраженный луч.

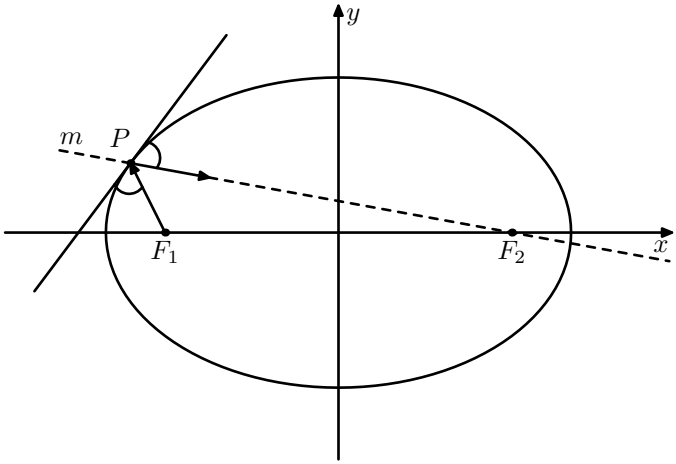


Рис. 57.

Решение. Обозначим точку падения луча на эллипс буквой P и определим ее координаты (x_p, y_p). Расстояние от центра эллипса до фокусов равно

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{45 - 20} = 5,$$

поэтому левый фокус эллипса имеет координаты $F_1(-5, 0)$, а правый — $F_2(5, 0)$. Так как прямая F_1P составляет угол α с осью Ox,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_p - y_f}{x_p - x_f} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_p - 0}{x_p + 5} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad y_p = -2(x_p + 5).$$

Подставив найденное соотношение в уравнение эллипса, найдем два возможных значения абсциссы точки P:

$$\frac{x_p^2}{45} + \frac{y_p^2}{20} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x_p^2 + 36(x_p + 5)^2 = 180 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_p = -3 \\ x_p = -6 \end{array} \right. .$$

Учитывая, что точка P лежит левее фокуса F_1, отбросим первый корень и выпишем искомые координаты:

$$x_p = -6 \quad \Rightarrow \quad y_p = -2(x_p + 5) = 2 \quad \Rightarrow \quad F_1 = (-6, 2).$$

Согласно оптическому свойству эллипса, отраженный луч пройдет через второй фокус. Составим уравнение прямой PF_2:

$$M(x,y) \in PF_2 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{MF_2} \parallel \overrightarrow{PF_2} \;\Leftrightarrow\; \frac{x-5}{-11} = \frac{y}{2} \;\Leftrightarrow\; 2x+11y-10=0.$$

Ответ: $m:\ 2x+11y-10=0$.

Пример 7. Прямая $l:\ 2x-y-4=0$ касается гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-3,0)$ и $F_2(3,0)$. Составить уравнение этой гиперболы.

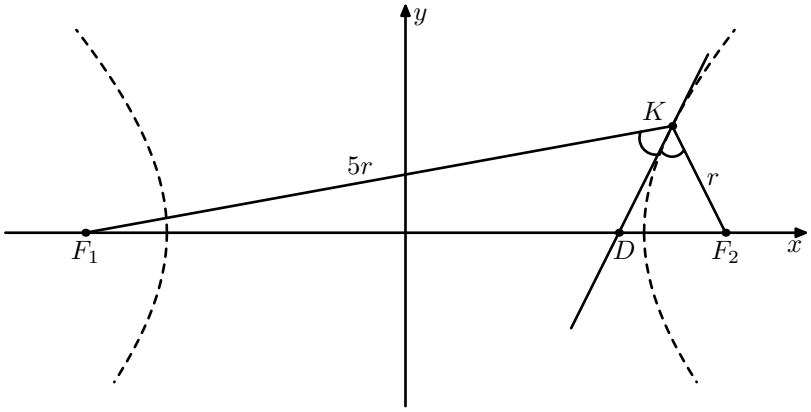


Рис. 58.

Решение. Обозначим через K точку касания искомой гиперболы и данной прямой и рассмотрим треугольник F_1KF_2. Согласно оптическому свойству гиперболы, прямая l является биссектрисой угла K. Основание биссектрисы D лежит на оси Ox, поэтому его абсцисса может быть найдена из следующего уравнения:

$$2x_d - y_d - 4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x_d = 4 \quad\Leftrightarrow\quad x_d = 2.$$

Длины отрезков F_1D и F_2D, на которые биссектриса треугольника разбивает его основание, относятся друг к другу так, как длины боковых сторон F_1K и F_2K, следовательно,

$$\frac{F_1K}{F_2K} = \frac{F_1D}{F_2D} = 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_1K = 5r \\ F_2K = r. \end{cases}$$

Пусть α — угол наклона прямой l к оси Ox, а β — угол между прямыми l и F_2K. Определим из уравнения l значения тригонометрических функций угла α:

$$2x - y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\alpha = 1/\sqrt{5} \\ \sin\alpha = 2/\sqrt{5}. \end{cases}$$

Применим теорему синусов к треугольнику DKF_2:

$$\frac{DF_2}{\sin\beta} = \frac{KF_2}{\sin\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin\beta} = \frac{r}{2/\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}r}.$$

Далее перейдем к двойному углу

$$\angle F_1KF_2 = 2\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\angle F_1KF_2 = \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = 1 - \frac{8}{5r^2}$$

и запишем теорему косинусов для треугольника F_1KF_2:

$$F_1F_2^2 = F_1K^2 + F_2K^2 - 2F_1KF_2K\cos\angle F_1KF_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 36 = 25r^2 + r^2 - 10r^2 \cdot \left(1 - \frac{8}{5r^2}\right) \ \Leftrightarrow \ 16r^2 = 20 \ \Leftrightarrow \ r = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Так как разность фокальных радиусов F_1K и F_2K составляет $2a$,

$$2a = F_1K - F_2K = 4r = 2\sqrt{5} \ \Rightarrow \ a = \sqrt{5} \ \Rightarrow \ b = \sqrt{c^2 - a^2} = 2.$$

Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Задачи для самостоятельной работы

168. Определить положение точек $A(6,-3)$, $B(-2,5)$, $C(3,-6)$, $D(\sqrt{50},0)$, $E(-4,2\sqrt{6})$, $G(1,\sqrt{26})$ относительно эллипса $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$.

169. Сторона и высота ромба равны соответственно 5 и 4,8. Через две противолежащие его вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат.

170. На эллипсе $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ найти точку, расположенную на расстоянии 5 от его малой оси.

171. Найти длину диаметра эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, направленного вдоль биссектрисы координатного угла.

172. Найти геометрическое место точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом.

173. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $P(1,1)$ и содержащей хорду эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, делящуюся в точке P пополам.

174. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$, проходящих через точку $P(-6,3)$.

175. Эллипс касается прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями $x+y=5$ и $x-4y=10$ соответственно. Составить уравнение эллипса при условии, что его оси совпадают с координатными.

176. Окружности S_1 и S_2 с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 не пересекаются и не расположены одна в другой. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся S_1 и S_2 внешним образом.

177. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(12,3\sqrt{5})$, с фокусами, расположенными в точках $F_1(10,0)$ и $F_2(-10,0)$.

178. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(12, 3\sqrt{3})$, асимптоты которой лежат на прямых $y = \pm\frac{1}{2}x$.

179. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ взята точка P с положительной ординатой и абсциссой, равной 10. Найти ее фокальные радиусы и угол между ними.

180. Найти уравнение прямой, содержащей диаметр гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 576$ длины 20.

181. К гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ провести касательную, находящуюся на одинаковом расстоянии от ее центра и правого фокуса.

182. Доказать, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом.

183. Найти фокусы гиперболы, заданной уравнением $y = \frac{1}{x}$.

13 Замена координат на плоскости

Замена координат на плоскости или в пространстве, так же как и замена переменной в уравнении или неравенстве, служит для упрощения поставленной задачи. Она производится, как правило, с целью преобразования уравнения кривой или поверхности и представления ее в наиболее удобном для дальнейшей работы аналитическом виде. Например, переход от декартовой системы к полярной значительно упрощает уравнения окружностей с центром в начале координат и проходящих через него прямых.

Основным объектом изучения в аналитической геометрии являются линейные замены координат, выражающиеся в выборе подходящего начала отсчета и/или базисного набора векторов. При этом большинство сопутствующих вычислений и перерасчетов осуществляются с помощью матричного аппарата, а ключевую роль здесь играет матрица перехода.

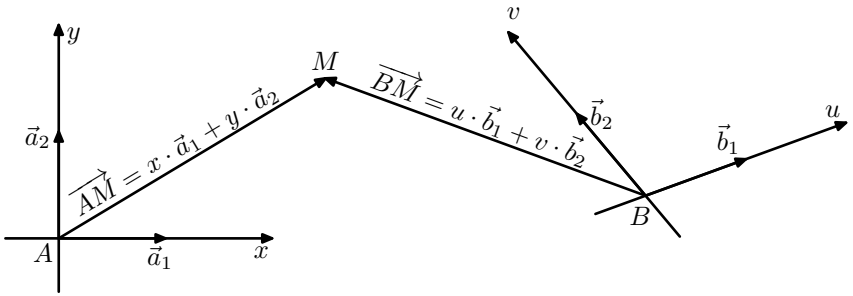


Рис. 59.

Пусть $a = \{A, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ и $b = \{B, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ — две системы координат на плоскости, такие, что начало системы b имеет в системе a координаты $B(x_0, y_0)$, а матрица перехода от базиса $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ к базису $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ имеет вид

$$C_{a\to b} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \vec{b}_1 = c_{11}\cdot\vec{a}_1 + c_{21}\cdot\vec{a}_2,\;\; \vec{b}_2 = c_{12}\cdot\vec{a}_1 + c_{22}\cdot\vec{a}_2.$$

Тогда координаты (x, y) произвольной точки плоскости M в системе a и координаты (u, v) той же точки в системе b связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства указанной формулы рассмотрим радиус-вектор точки M в системе a и разложим его по базисным векторам $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ двумя способами. С одной стороны, учитывая координаты точки M в первой системе, мы можем представить его в виде суммы

$$M = (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = x \cdot \vec{a}_1 + y \cdot \vec{a}_2.$$

С другой стороны, мы можем представить данный вектор в виде суммы $AM = AB + BM$ и, используя определение матрицы перехода и координаты точки M во второй системе, получить второе разложение:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = (x_0 \cdot \vec{a}_1 + y_0 \cdot \vec{a}_2) + (u \cdot \vec{b}_1 + v \cdot \vec{b}_2) =$$

$$= (x_0 \cdot \vec{a}_1 + y_0 \cdot \vec{a}_2) + u \cdot (c_{11} \cdot \vec{a}_1 + c_{21} \cdot \vec{a}_2) + v \cdot (c_{12} \cdot \vec{a}_1 + c_{22} \cdot \vec{a}_2) =$$

$$= (x_0 + c_{11}u + c_{12}v) \cdot \vec{a}_1 + (y_0 + c_{21}u + c_{22}v) \cdot \vec{a}_2.$$

В силу единственности разложения вектора $\overrightarrow{AM}$ по базису $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, имеют место равенства

$$x = x_0 + c_{11}u + c_{12}v, \quad y = y_0 + c_{21}u + c_{22}v,$$

которые в матричной форме эквивалентны уравнению

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

13.1 Ортогональные замены координат

Рассмотрим примеры замен координат на плоскости, которые часто используются в геометрических задачах. В частности, они будут использованы при классификации кривых второго порядка.

Параллельный перенос подразумевает, что система $b = \{B, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ получается из данной системы $a = \{A, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ сдвигом вдоль некоторого вектора $\vec{v}$.

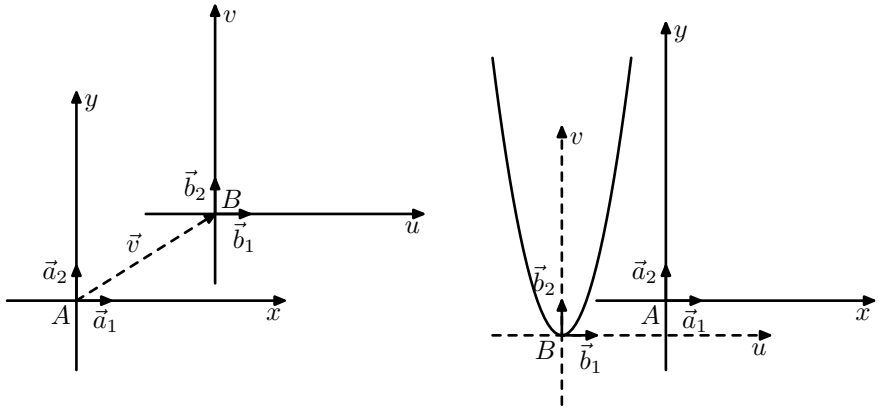


Рис. 60.

В этом случае матрица перехода $C_{a\to b}$ совпадает с единичной, а формулы замены координат принимают вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

⟳ Уравнение параболы, заданной уравнением $y = 2x^2 + 12x + 17$, приводится к стандартному виду

$$y = 2x^2+12x+17 \Leftrightarrow y+1 = 2(x+3)^2 \Leftrightarrow v = 2u^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-3 \\ v-1 \end{pmatrix}$$

с помощью параллельного переноса системы координат вдоль вектора $\vec{v} = (-3, -1)$. ⟲

Поворот вокруг начала координат подразумевает, что система $b = \{B = A, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ получается из данной системы $a = \{A, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ вращением около точки A на некоторый угол α.

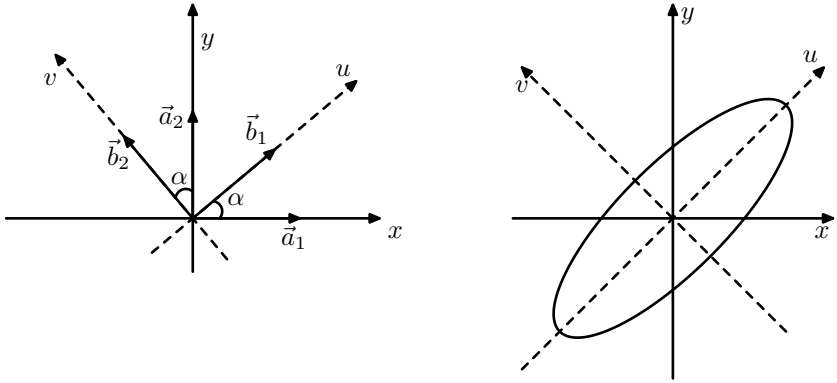


Рис. 61.

Найдем матрицу перехода $C_{a\to b}$, разложив базисные векторы $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ с помощью тригонометрических функций:

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \vec{a}_1 \cdot \cos\alpha + \vec{a}_2 \cdot \sin\alpha \\ \vec{b}_2 = -\vec{a}_1 \cdot \sin\alpha + \vec{a}_2 \cdot \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно, координаты точек в системах a и b связаны следующими соотношениями:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u\cos\alpha - v\sin\alpha \\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha \end{cases}.$$

$\circlearrowleft$ Уравнение эллипса $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$ приводится к стандартному виду поворотом системы координат на угол $\alpha = 45°$:

$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}},\ y = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \Rightarrow 5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5(u-v)^2}{2} - 8\frac{(u-v)(u+v)}{2} + \frac{5(u+v)^2}{2} = 9 \Leftrightarrow \frac{u^2}{9} + v^2 = 1. \circlearrowright$$

Отражение относительно прямой подразумевает, что система $b = \{B = A, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ получается из данной системы $a = \{A, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ с помощью зеркальной симметрии относительно прямой l, проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол $\frac{\alpha}{2}$.

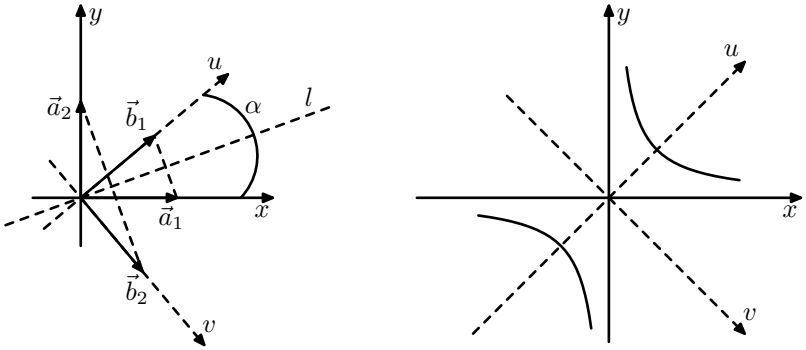


Рис. 62.

В этом случае первый базисный вектор $\vec{b}_1$ образует с осью Ox угол α и раскладывается в следующую линейную комбинацию

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 \cdot \cos\alpha + \vec{a}_2 \cdot \sin\alpha.$$

Второй угол $\vec{b}_2$ получается из $\vec{a}_1$ поворотом на угол $\alpha - 90°$ (с учетом направления вращения), следовательно,

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_1 \cdot \cos(\alpha - 90°) + \vec{a}_2 \cdot \sin(\alpha - 90°) = \vec{a}_1 \cdot \sin\alpha - \vec{a}_2 \cdot \cos\alpha.$$

Таким образом, матрица перехода $C_{a\to b}$ и замена координат $a \to b$ подчиняются формулам

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x = u\cos\alpha + v\sin\alpha \\ y = u\sin\alpha - v\cos\alpha \end{cases}.$$

$\circlearrowleft$ Уравнение гиперболы $xy = 1$ можно привести к стандартному виду отражением системы координат относительно прямой l, составляющей с осью Ox угол $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{8}$:

$$\begin{cases} x = (u+v)/\sqrt{2} \\ y = (u-v)/\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow\ xy = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1. \ \circlearrowright$$

Рассмотренные замены координат параллельного переноса, поворота и отражения оказываются наиболее полезными с практической точки зрения, поскольку они обладают свойством *ортогональности*: их матрицы перехода удовлетворяют равенству $C^T \cdot C = C \cdot C^T = E$. В силу этого свойства сохраняются формулы для вычисления расстояния между любыми двумя точками плоскости. Другими словами, если точки M и N имеют в системе a координаты $M(x_m, y_m)$ и $N(x_n, y_n)$, а расстояние между ними вычисляется по формуле

$$MN = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2},$$

то при ортогональной замене координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad C^T = C^{-1},$$

расстояние между теми же точками с координатами $M(u_m, v_m)$ и $N(u_n, v_n)$ в системе b может быть найдено из равенства

$$MN = \sqrt{(u_m - u_n)^2 + (v_m - v_n)^2}.$$

Уравнение эллипса $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$ можно привести к стандартному виду выделением полного квадрата:

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; 5\left(x^2 - 2 \cdot \tfrac{4}{5}xy + \tfrac{16}{25}y^2\right) - \tfrac{16}{5}y^2 + 5y^2 = 9 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 5\left(x - \tfrac{4}{5}y\right)^2 + \tfrac{9}{5}y^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{u^2}{9/5} + \tfrac{v^2}{1/5} = 1, \quad \begin{cases} x = u + \frac{4}{5}v \\ y = v \end{cases}.$$

Несмотря на то что полученное уравнение имеет стандартный вид, мы не можем с его помощью вычислить геометрические характеристики эллипса — его полуоси и фокальное расстояние. Искажение в длинах вызвано матрицей замены координат, которая в данном случае не является ортогональной:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{25} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \neq E.$$

13.2 Преобразование квадратичных форм

Произвольное уравнение второй степени в координатах (x, y) можно разложить на две составляющие — квадратичную форму и линейную часть. Упрощение последней с помощью ортогональных преобразований оказывается несложным, в то время как работа с первой заслуживает отдельного обсуждения.

Пусть на плоскости выбрана система координат $a = \{A, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ с осями Ax и Ay. Тогда выражение

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad \text{где} \quad a_{11},\ a_{12},\ a_{22} \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$

называется *квадратичной формой*, зависящей от переменных x и y.

↻ Для примера выберем на плоскости систему

$$a = \{A = (0, 0),\ \vec{a}_1 = (1, 3),\ \vec{a}_2 = (-2, 1)\}$$

и рассмотрим вопрос о том, как вычислить квадрат длины вектора. Соответствующее выражение представляет собой квадратичную форму, которая в системе a имеет следующее представление:

$$f(x, y) = (\vec{v}, \vec{v}) = (x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2, x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2) =$$

$$= x^2(\vec{a}_1, \vec{a}_1) + 2xy(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + y^2(\vec{a}_2, \vec{a}_2) = 10x^2 + 2xy + 5y^2. \ ↺$$

При работе с квадратичными формами очень удобным оказывается матричный аппарат, значительно упрощающий вычисления. Выражение (4) представляется в виде следующего произведения:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= V^T \cdot F_a \cdot V, \quad F_a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Матрица F_a при этом называется *матрицей квадратичной формы f в системе координат a*.

Лемма 13.1. *Пусть* $a = \{A,\ \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ *и* $b = \{B,\ \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ *— две системы координат, связанные матрицей перехода* $C = C_{a\to b}$. *Тогда матрицы* F_a *и* F_b *квадратичной формы* f *в системах* a *и* b *удовлетворяют равенству* $F_b = C^T \cdot F_a \cdot C$.

□ Обозначим координаты системы a парой (x, y), а координаты системы b — парой (u, v). Тогда координаты произвольного вектора $\vec{v}$ в системах a и b связаны равенством

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Используя данное равенство, вычислим значение формы f на векторе v в координатах (u, v):

$$f(\vec{v}) = V^T \cdot F \cdot V = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot F_a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \left(C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)^T \cdot F_a \cdot C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot C^T F_a C \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Согласно определению матрицы квадратичной формы, произведение $C^T F_a C$ совпадает с F_b. ■

⟳ Для примера рассмотрим системы

$$a = \{\vec{a}_1 = (1,0),\ \vec{a}_2 = (0,1)\} \quad \text{и} \quad b = \{\vec{b}_1 = (1,3),\ \vec{b}_2 = (-2,1)\},$$

которые связаны матрицей перехода $C_{a\to b} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

В качестве f выберем форму, вычисляющую квадрат длины вектора. В системе a она имеет представление $f(x, y) = x^2 + y^2$, а ее матрица F_a совпадает с единичной. По доказанной формуле замены координат имеем:

$$F_b = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в новой системе координат квадрат длины вектора будет выражаться по формуле $f(u,v) = 10u^2 + 2uv + 5v^2$. $\circlearrowleft$

Следующее утверждение послужит основой для классификации кривых второго порядка.

Теорема 13.2. *Пусть квадратичная форма f имеет в системе $a = \{A,\ \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ координатное представление*

$$f(\vec{v}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Тогда существует система координат $b = \{B,\ \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, полученная из a вращением на некоторый угол α, такая, что форма f в этой системе имеет диагональный вид:

$$f(\vec{v}) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2.$$

$\square$ Рассмотрим ортогональную замену координат $a \to b$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = u\cos\alpha - v\sin\alpha \\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha \end{cases}$$

и найдем элементы побочной диагонали матрицы F_b:

$$(F_b)_{12} = (F_b)_{21} = \tfrac{1}{2}\Big(-a_{11}\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha + a_{22}\sin 2\alpha \Big).$$

Форма f примет диагональный вид в системе b при условии

$$(F_b)_{12} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a_{12}\cos 2\alpha = (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha.$$

Если $a_{12} = 0$, то форма f имеет диагональный вид в исходной системе координат a, поэтому в качестве α можно взять нулевой угол. В противном случае можно выбрать любой угол из тригонометрического семейства решений

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} + \frac{\pi}{2}\,n,\ n \in \mathbb{Z}. \ \blacksquare$$

13.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Систему координат Oxy повернули на угол $\alpha = 150^\circ$ и параллельно перенесли вдоль вектора $\vec{v} = (\sqrt{3}, -1)$. Найти уравнение прямой $l:\ y = -\sqrt{3}x + 2$ в новой системе координат.

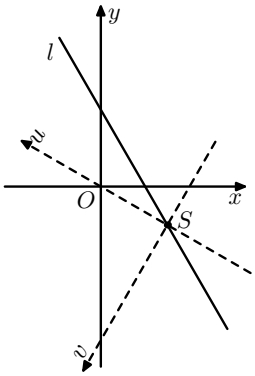


Рис. 63.

Решение. Обозначим начало новой системы координат буквой S, а ее оси — Su и Sv. Координаты начала S определяются вектором $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{OS} = \vec{v} \quad \Rightarrow \quad S = (x_s, y_s) = (\sqrt{3}, -1).$$

Матрица перехода к новым координатам имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

а формулы замены координат $(x, y) \to (u, v)$ выглядят следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{3}u - v}{2} + \sqrt{3} \\ y = \frac{u - \sqrt{3}v}{2} - 1. \end{cases}$$

Осталось лишь подставить найденные выражения для координат (x, y) в уравнение прямой l:

$$l:\ \frac{u - \sqrt{3}v}{2} - 1 = -\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}u - v}{2} + \sqrt{3}\right) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{1}{\sqrt{3}}u.$$

Ответ: $l:\ v = -\frac{1}{\sqrt{3}}u$.

Пример 2. Систему координат Oxy повернули на угол $\alpha = 60^\circ$ и параллельно перенесли вдоль вектора $\vec{v} = (-1, \sqrt{3})$. Найти уравнение окружности $c:\ x^2 + y^2 = 1$ в новой системе координат.

Решение. Обозначим начало новой системы координат буковой S, а ее оси — Su и Sv. Запишем формулы замены $(x, y) \to (u, v)$:

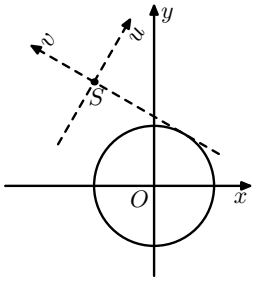


Рис. 64.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Так как матрица замены координат является ортогональной, обратная получается из нее транспонированием. Следовательно, переход $(u, v) \to (x, y)$ выражается равенством

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x - x_s \\ y - y_s \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x - x_s \\ y - y_s \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем координаты (u_0, v_0) начала исходной системы O, для которого $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + 1 \\ y_0 - \sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Остается лишь записать уравнение окружности c:

$$c:\ (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (u + 1)^2 + (v + \sqrt{3})^2 = 1.$$

Ответ: $c:\ (u + 1)^2 + (v + \sqrt{3})^2 = 1.$

Пример 3. Найти координаты точки Q, симметричной $P(5,5)$ относительно прямой $l:\ y=3x$.

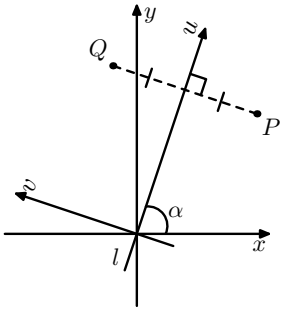


Рис. 65.

Решение. Введем новую систему координат Ouv с тем же началом, в которой ось Ou совпадает с l. Она получается из данной системы Oxy поворотом на угол α, для которого значения тригонометрических функций могут быть найдены из уравнения прямой l:

$$y=3x \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\alpha=3 \ \Rightarrow\ \begin{cases}\cos\alpha=1/\sqrt{10}\\ \sin\alpha=3/\sqrt{10}.\end{cases}$$

Координаты (x,y) и (u,v) одной и той же точки плоскости связаны соотношением

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Используя полученные равенства, определим координаты точки P в новой системе:

$$\begin{pmatrix}u_p\\v_p\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{10}\\-\sqrt{10}\end{pmatrix}.$$

Так как точка Q симметрична P относительно оси абсцисс Ou, то ее координаты в новой системе подчиняются равенству

$$\begin{cases}u_q=u_p\\v_q=-v_p\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}u_q\\v_q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_p\\-v_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{10}\\\sqrt{10}\end{pmatrix}.$$

Осталось лишь вернуться в систему координат Oxy:

$$\begin{pmatrix}x_q\\y_q\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{10}\\\sqrt{10}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-\sqrt{10}\\7\sqrt{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}.$$

Ответ: $Q=(-1,7)$.

Пример 4. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A = (2, 3)$, $B = (-8, 7)$, $C = (4, 8)$. Доказать, что он является прямоугольным, и найти уравнение биссектрисы прямого угла.

Решение. Найдем длины всех сторон и воспользуемся теоремой Пифагора:

$$AB^2 = 116,\ AC^2 = 29,\ BC^2 = 145 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ BC^2 = AB^2 + AC^2 \ \Rightarrow\ \angle A = 90^\circ.$$

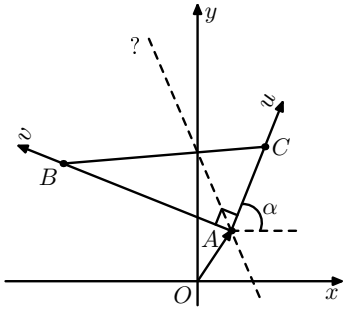


Рис. 66.

Введем систему координат Auv с началом в вершине A и осями Au и Av, параллельными сторонам AC и AB соответственно. Эта система получается из первоначальной Oxy поворотом на некоторый угол α и смещением вдоль вектора $\overrightarrow{OA} = (2, 3)$. Для нахождения формул замены координат рассмотрим вектор $\overrightarrow{AC}$ и определим значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

$$\overrightarrow{AC} = (2, 5),\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{29} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}},\ \sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$

Таким образом, координаты (x, y) и (u, v) связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 3 \end{pmatrix}.$$

Биссектриса угла A представляет собой биссектрису первого и третьего координатных углов новой системы Auv, поэтому имеет уравнение $u = v$. Сделав в этом равенстве замену координат, найдем:

$$\frac{2 \cdot (x-2) + 5 \cdot (y-3)}{\sqrt{29}} = \frac{-5 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y-3)}{\sqrt{29}} \Leftrightarrow 7x + 3y - 23 = 0.$$

Ответ: $7x + 3y - 23 = 0$.

Пример 5. Фокусы эллипса e находятся в точках $F_1(-2,0)$ и $F_2(0,2)$, а его большая полуось a равна $\sqrt{5}$. Составить уравнение эллипса в данной системе координат.

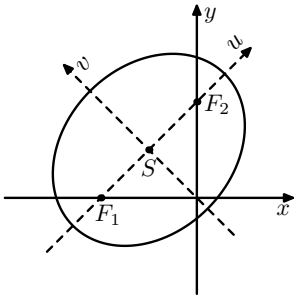


Рис. 67.

Решение. Обозначим центр эллипса через S, а оси канонической системы координат — через Su и Sv. Определим фокусное расстояние и малую полуось эллипса и выпишем его каноническое уравнение:

$$c = \tfrac{1}{2}|F_1F_2| = \tfrac{1}{2}\sqrt{(0+2)^2+(2-0)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad e:\ \frac{u^2}{5}+\frac{v^2}{3}=1.$$

Теперь опишем расположение канонической системы координат Suv относительно данной Oxy. Так как центр эллипса является серединой отрезка F_1F_2, его координаты (x_s, y_s) представляют собой следующие полусуммы:

$$S = \frac{F_1+F_2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_s = \frac{-2+0}{2} = -1,\ y_s = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Фокусы F_1 и F_2 лежат на прямой $y = x+2$, поэтому каноническая система координат повернута относительно нее на угол $\alpha = 45°$. Следовательно, формулы замены координат имеют вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = (x+y)/\sqrt{2} \\ v = (-x+y-2)/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Подставим найденные выражения в уравнение эллипса:

$$e:\ \frac{u^2}{5}+\frac{v^2}{3}=1 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^2-4xy+8y^2+20x-20y-10=0.$$

Ответ: $e:\ 8x^2-4xy+8y^2+20x-20y-10=0.$

Пример 6. Определить полуоси эллипса e, заданного уравнением

$$e: \ 17x^2 - 12xy + 8y^2 = 20.$$

Решение. Рассмотрим квадратичную форму f, имеющую в данной системе координат Oxy представление

$$f(x, y) = 17x^2 - 12xy + 8y^2.$$

Согласно теореме 13.2, существует угол поворота α и соответствующая система координат Ouv, в которой форма f имеет диагональный вид:

$$f(u, v) = \lambda \cdot u^2 + \mu \cdot v^2.$$

Используя указанную теорему и формулы двойного аргумента, определим возможные значения $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{17 - 8}{-12} = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}\alpha = -2 \\ \operatorname{ctg}\alpha = 1/2. \end{array}\right.$$

Каждый из полученных углов приведет форму к диагональному виду, поэтому можно выбирать любой из них, например, $\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{1}{2}$:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = 1/\sqrt{5} \\ \sin\alpha = 2/\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Формулы замены координат $(x, y) \to (u, v)$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} u - 2v \\ 2u + v \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить явный вид формы f в новых координатах воспользуемся прямой подстановкой:

$$f = 17 \cdot \left(\frac{u - 2v}{\sqrt{5}}\right)^2 - 12 \cdot \left(\frac{u - 2v}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{2u + v}{\sqrt{5}}\right) + 8 \cdot \left(\frac{2u + v}{\sqrt{5}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\Big(17(u-2v)^2 - 12(u-2v)(2u+v) + 8(2u+v)^2\Big) = 5u^2 + 20v^2.$$

Таким образом, эллипс e в системе Ouv описывается уравнением

$$5u^2 + 20v^2 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{1} = 1$$

и имеет полуоси $a = 2$ и $b = 1$.

Ответ: $a = 2$ и $b = 1$.

Пример 7. Найти уравнения асимптот гиперболы h, заданной уравнением $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 13$.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму $5x^2 + 24xy - 5y^2$ и найдем возможные значения угла поворота α, приводящего ее к диагональному виду:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{5 - (-5)}{24} = \frac{5}{12} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{5}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} \alpha = 3/2 \\ \operatorname{ctg} \alpha = -2/3. \end{array} \right.$$

Выберем для определенности угол $\alpha = \operatorname{arcctg} \frac{3}{2}$ и выпишем матрицу перехода $(x, y) \to (u, v)$:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 3/\sqrt{13} \\ \sin \alpha = 2/\sqrt{13} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 13.1, в новой системе координат Ouv матрица квадратичной формы имеет вид

$$F_{uv} = C^T \cdot F_{xy} \cdot C = C^T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -13 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в системе Ouv гипербола h описывается уравнением

$$13u^2 - 13v^2 = 13 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - v^2 = 1,$$

а ее асимптоты l_1 и l_2 являются биссектрисами координатных углов:

$$l_{1,2}:\ u^2-v^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad l_1:\ u=v,\quad l_2:\ u=-v.$$

Так как использованная замена координат является ортогональной,

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3u-2v\\ 2u+3v\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3x+2y\\ -2x+3y\end{pmatrix}.$$

Подставив выражения переменных u и v в уравнения прямых l_1 и l_2, получим окончательный ответ:

$$l_1:\ u=v\ \Leftrightarrow\ \frac{3x+2y}{\sqrt{13}}=\frac{-2x+3y}{\sqrt{13}}\ \Leftrightarrow\ y=5x,\qquad l_2: x=-5y.$$

Ответ: $l_1:\ y=5x$ и $l_2:\ x=-5y$.

Задачи для самостоятельной работы

184. Точка $A(3,1)$ при параллельном переносе осей координат получила новые координаты $(2,-1)$. Построить заданную и смещенную системы координат и точку A. Найти острый угол поворота осей координат, при котором точка $B(2,4)$ получит новую абсциссу 4. Построить обе системы координат.

185. Найти ортогональную замену координат, сохраняющую ориентацию и преобразующую точку $(x,y)=(0,2)$ в точку $(u,v)=(1,\sqrt{3})$, а точку $(x,y)=(1,\sqrt{3})$ — в точку $(u,v)=(2,2)$. Вычислить соответствующий угол поворота.

Указание. Неизменность ориентации равносильна условию $det\,C>0$.

186. Найти ортогональную замену координат, меняющую ориентацию и преобразующую точку $(x,y)=(2,0)$ в точку $(u,v)=(1,\sqrt{3})$, а точку $(x,y)=(1,\sqrt{3})$ в точку $(u,v)=(3,\sqrt{3})$. Определить соответствующую ось симметрии.

Указание. Смена ориентации равносильна неравенству $\det C < 0$.

187. Найти неподвижную точку данного ортогонального преобразования:

$$x = u\cos\varphi - v\sin\varphi + x_0, y = u\sin\varphi + v\cos\varphi + y_0, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

188. Поворотом осей координат на угол $\alpha = 45^\circ$ упростить уравнения:

а) $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$; б) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 32 = 0$.

Построить обе системы координат и кривые.

189. Переносом начала координат привести следующие уравнения к виду $xy = k$:

а) $xy - 2x - y + 8 = 0$; б) $xy - x + 2y = 6$.

В ответе указать начало координат O' смещенной системы.

190. Определить угол поворота осей координат, при котором в данных уравнениях исчезает смешанное произведение координат xy:

а) $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$; б) $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24 = 0$.

191. Поворотом осей координат на угол $\alpha = 45^\circ$ упростить уравнение

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0.$$

Определить координаты фокусов в исходной системе координат.

192. Система координат s' получается из стандартной системы s поворотом на угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ и смещением на вектор $\overrightarrow{OO'} = (2, 1)$. Найти координаты точки $M(1, 1)$ и уравнение прямой $x + y - 2 = 0$ в новой системе.

193. Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-1, -1)$ и $F_2(2, 1)$, а его большая полуось равна 2. Описать каноническую систему эллипса и его каноническое уравнение. Найти уравнение эллипса в стандартной системе координат и сделать рисунок.

194. Фокусы гиперболы расположены в точках $F_1(-2,1)$ и $F_2(2,0)$, а ее действительная полуось равна 2. Описать каноническую систему гиперболы и ее каноническое уравнение. Найти уравнение гиперболы в стандартной системе координат и сделать рисунок.

195. Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-3,2)$ и $F_2(1,-2)$, а его большая полуось равна 5. Выписать параметрическое уравнение эллипса.

196. Фокусы гиперболы расположены в точках $F_1(-1,-3)$ и $F_2(3,1)$, а ее действительная полуось равна 2. Выписать параметрическое уравнение гиперболы.

197. Фокусы гиперболы расположены в точках $F_1(-2,-3)$ и $F_2(2,0)$, а ее действительная полуось равна 2. Написать уравнения асимптот гиперболы.

198. Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-4,-2)$ и $F_2(4,2)$, а его большая полуось равна 6. Найти точку эллипса, наиболее удаленную от начала координат.

14 Кривые второго порядка

В завершение краткого обзора раздела аналитической геометрии, касающегося метода координат, будет приведена полная классификация кривых второго порядка. Она охватывает по сути весь предложенный ранее материал и сочетает в себе все большинство практически значимых методов решения геометрических задач.

Принципиально новой идеей служит понятие инварианта. Оно используется во многих разделах математики и в целом может быть определено как числовая характеристика линии, поверхности или уравнения, которая остается неизменной в процессе некоторого преобразования (например, при изгибании многогранника его объем сохраняется). Инварианты применимы, в частности, при классификации изучаемых объектов и выделения особенностей строения геометрических фигур, которые оказываются значимыми в определенного типа задачах.

Кривой второго порядка, как уже отмечалось, называется плоская линия, имеющая в некоторой системе координат Oxy уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

в котором квадратичная форма является *невырожденной*. Это означает, что хотя бы один из ее коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} должен быть отличен от нуля. Порядок кривой не только имеет алгебраическое выражение в виде степени соответствующего уравнения, но и допускает геометрическое истолкование в терминах прямолинейного сечения.

Лемма 14.1. *Пусть S — кривая второго порядка, а L — прямая. Тогда возможны два варианта взаимного расположения S и L:*

- *$L \subset S$ — прямая L является частью кривой S;*
- *пересечение $S \cap L$ состоит не более чем из двух точек.*

□ Рассмотрим параметрическое уравнение прямой L

$$L : x = x(t) = x_0 + a \cdot t, \quad y = y(t) = y_0 + b \cdot t, \quad t \in \mathbb{R},$$

в котором (x_0, y_0) — некоторая точка, лежащая на прямой, а $\vec{v} = (a, b)$ — ее направляющий вектор. Нахождение точек пересечения S и L можно свести к решению квадратного уравнения, которое получается при подстановке параметрических функций $x(t)$ и $y(t)$ в общее уравнение кривой второго порядка:

$$a_{11}(x_0 + at)^2 + 2a_{12}(x_0 + at) \cdot (y_0 + bt) + a_{22}(y_0 + bt)^2 +$$

$$+2a_1(x_0 + at) + 2a_2(y_0 + bt) + a_0 = 0.$$

После приведения подобных возможны следующие варианты.

1) Уравнение превратится в тождество вида $0 = 0$: в этом случае все точки вида $(x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, будут лежать на кривой S, что эквивалентно условию $L \subset S$.

2) Уравнение станет линейным с ненулевым старшим коэффициентом: линейное уравнение всегда имеет единственный корень, следовательно, с таком случае пересечение $S \cap L$ будет состоять ровно из одной точки.

3) Уравнение станет квадратным с ненулевым старшим коэффициентом: так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, пересечение $S \cap L$ будет состоять не более чем из двух точек. ■

⟳ Найдем значения параметра α, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Первое уравнение описывает равностороннюю гиперболу с центром в точке $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, а второе — прямую, проходящую через начало координат и образующую угол α с осью Ox. Подставим параметрическое представление прямой

$$x = t \cdot \cos\alpha, \quad y = t \cdot \sin\alpha, \quad t \in \mathbb{R}$$

в первое уравнение и приведем подобные:

$$(t\cos\alpha)^2 - (t\sin\alpha)^2 = t\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t\cdot\cos 2\alpha = \cos\alpha. \end{array}\right.$$

Если $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то прямая становится параллельна асимптотам гиперболы. В этом случае второе уравнение совокупности не имеет решений, а пересечение данных линий состоит ровно из одной точки. При $\alpha = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, прямая становится вертикальной. Данное предположение приводит к совпадению корней двух уравнений совокупности, что на геометрическом языке означает касание данных линий.

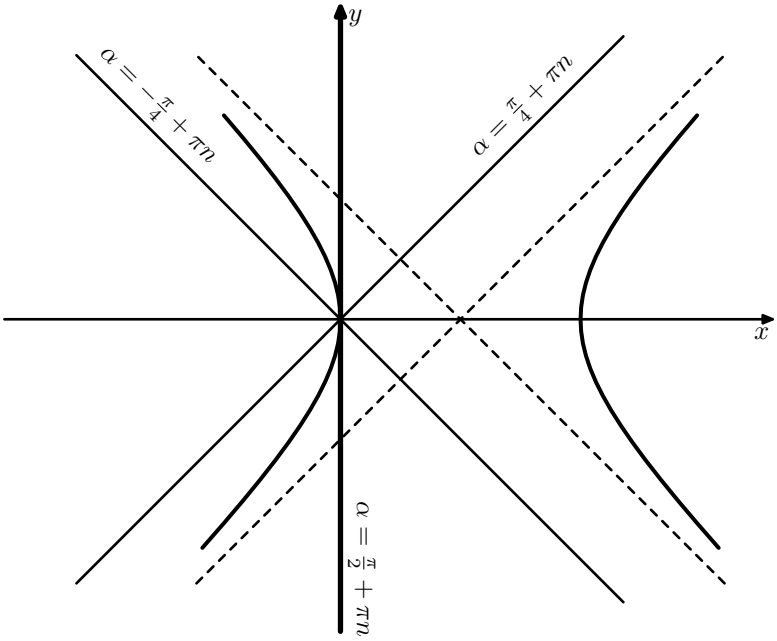


Рис. 68.

В противном случае, когда $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, гипербола и прямая пересекаются в двух точках. ⟲

14.1 Ортогональная классификация

К кривым второго порядка относятся рассмотренные выше эллипс, гипербола и парабола. Однако решением общего уравнения второго порядка могут служить и другие геометрические образы. Чтобы описать все возможные случаи, мы используем каноническую систему координат, в которой данное уравнение принимает наиболее простой вид.

Рассмотрим систему координат Ouv, полученную вращением системы Oxy, в которой квадратичная форма общего уравнения кривой второго порядка имеет диагональный вид. При замене координат $(x, y) \to (u, v)$ уравнение приводится к виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad \to$$
$$\to \quad b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + 2b_1u + 2b_2v + b_0 = 0. \quad (5)$$

Перечислим все возможные геометрические решения полученного уравнения в зависимости от коэффициентов $b_{11}, b_{22}, b_1, b_2, b_0$.

I. При $b_{11} \cdot b_{22} \neq 0$, дополнительным смещением начала координат вдоль вектора $\left(-\frac{b_1}{b_{11}}, -\frac{b_2}{b_{22}}\right)$ приведем уравнение (5) к каноническому виду:

$$b_{11}\left(u + \frac{b_1}{b_{11}}\right)^2 + b_{22}\left(v + \frac{b_2}{b_{22}}\right)^2 = \frac{b_1^2}{b_{11}} + \frac{b_2^2}{b_{22}} - b_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; b_{11}s^2 + b_{22}t^2 = c, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - b_1/b_{11} \\ t - b_2/b_{22} \end{pmatrix}, \; c = \frac{b_1^2}{b_{11}} + \frac{b_2^2}{b_{22}} - b_0.$$

Определим возможные решения:

1) $b_{11} > 0,\ b_{22} > 0,\ c > 0$ или $b_{11} < 0,\ b_{22} < 0,\ c < 0$ — эллипс с полуосями $\sqrt{\frac{c}{b_{11}}}$ и $\sqrt{\frac{c}{b_{22}}}$;

2) $b_{11} > 0,\ b_{22} > 0,\ c < 0$ или $b_{11} < 0,\ b_{22} < 0,\ c > 0$ — пустое множество (мнимый эллипс);

3) $b_{11} \cdot b_{22} > 0,\ c = 0$ — изолированная точка, начало системы координат (s, t);

4) $b_{11} \cdot b_{22} < 0,\ c \neq 0$ — гипербола с полуосями $\sqrt{\left|\frac{c}{b_{11}}\right|}$ и $\sqrt{\left|\frac{c}{b_{22}}\right|}$;

5) $b_{11} \cdot b_{22} < 0,\ c = 0$ — две прямые, пересекающиеся в начале системы координат (s, t).

II. Пусть один из старших коэффициентов $b_{11},\ b_{22}$ обращается в нуль, для определенности $b_{22} = 0$, при этом соответствующий младший коэффициент b_2 отличен от нуля. В этом случае дополнительным смещением начала координат

$$b_{11}u^2+2b_1u+2b_2v+b_0 = 0 \Leftrightarrow b_{11}\left(u + \frac{b_1}{b_{11}}\right)^2 = -2b_2\left(v + \frac{b_0b_{11} - b_1^2}{2b_{11}b_2}\right)$$

приведем уравнение (5) к каноническому виду

$$t = as^2, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - b_1/b_{11} \\ t - (b_0b_{11} - b_1^2)/(2b_{11}b_2) \end{pmatrix}, \quad a = -\frac{b_{11}}{2b_2}.$$

Следовательно, реализуется случай

6) $b_{22} = 0,\ b_2 \neq 0$: парабола с параметром $a = -\dfrac{b_{11}}{2b_2}$.

III. Если одна из переменных, для определенности, v, является в уравнении свободной, $b_{22} = b_2 = 0$, то дополнительным смещением начала координат

$$b_{11}u^2 + 2b_1u + b_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_{11}\left(u + \frac{b_1}{b_{11}}\right)^2 = \frac{b_1^2 - b_0b_{11}}{b_{11}}$$

приведем уравнение (5) к каноническому виду

$$s^2 = c, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - b_1/b_{11} \\ t \end{pmatrix}, \quad c = \frac{b_1^2 - b_0b_{11}}{b_{11}},$$

имеющему следующие возможные решения:

7) $c > 0$ — две параллельные прямые, отстоящие на расстоянии $2\sqrt{c}$;

8) $c = 0$ — две совпадающие прямые;

9) $c < 0$ — пустое множество (две мнимые параллельные прямые).

$\circlearrowleft$ Докажем, что уравнение

$$-3x^2 + 3y^2 + 8xy - 22x - 4y - 7 = 0$$

определяет две пересекающиеся прямые и найдем угол между ними. Повернем систему координат на угол

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{-3-3}{8} = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right),$$

произведя замену координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} u - 2v \\ 2u + v \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 13.2, квадратичная форма данного уравнения примет диагональный вид:

$$-3x^2 + 3y^2 + 8xy - 22x - 4y - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{3}{5}(u-2v)^2 + \frac{3}{5}(2u+v)^2 + \frac{8}{5}(u-2v)(2u+v) - \frac{22}{\sqrt{5}}(u-2v) -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{5}}(2u+v) - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5u^2 - 5v^2 - 6\sqrt{5}u + 8\sqrt{5}v - 7 = 0.$$

С помощью параллельного переноса системы координат (u, v) перейдем к каноническому уравнению кривой:

$$5u^2 - 5v^2 - 6\sqrt{5}u + 8\sqrt{5}v - 7 = 0 \Leftrightarrow 5\left(u - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 5\left(v - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5s^2 = 5t^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = t^2, \qquad \begin{cases} u = s + \frac{3\sqrt{5}}{5}, \\ t = v + \frac{4\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

Последнее равенство определяет две прямые с уравнениями $s = \pm t$, пересекающиеся под прямым углом. $\circlearrowright$

14.2 Инварианты

Если плоская кривая l определяется в системе координат (x, y) уравнением $F(x, y) = 0$, то при замене координат $(x, y) \to (u, v)$ ее уравнение преобразуется по закону

$$F(x, y) = 0 \quad \to \quad G(u, v) = F(x(u, v), y(u, v)) = 0.$$

В общем положении функции F и G различаются по форме и обладают разными аналитическими свойствами. Однако в некоторых специальных случаях уравнение, описывающее кривую, может содержать информацию о геометрической характеристике кривой, которая не зависит от системы координат и сохраняется при замене $(x, y) \to (u, v)$. Например, общий вид кривой второго порядка не меняется при линейной замене координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

и разницу соответствующих функций $F(x, y)$ и $G(u, v)$ составляют лишь числовые значения коэффициентов

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad \to \\ \to \quad b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2 + 2b_1u + 2b_2v + b_0 = 0. \end{aligned}$$

Числовые характеристики уравнений плоских кривых, сохраняющиеся при заменах координат, называются *инвариантами*.

$\circlearrowleft$ Покажем, что свойство невырожденности квадратичной формы кривой второго порядка является инвариантным. Коэффициенты формы f в разных системах координат $a = (x, y)$ и $b = (u, v)$ связаны соотношениями

$$F_b = C^T \cdot F_a \cdot C \quad \Leftrightarrow \quad F_a = \left(C^{-1}\right)^T \cdot F_b \cdot C^{-1}, \qquad C = C_{a \to b}.$$

Следовательно, если одна из матриц вырождается, вторая также обязана быть нулевой. $\circlearrowright$

Теорема 14.2. *След и определитель матрицы квадратичной формы кривой второго порядка*

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$$

являются инвариантами ортогональных замен координат.

□ Определим *характеристический многочлен* квадратичной формы f в системе координат $a = (x, y)$

$$F_a(\lambda) = det\Big(F_a - \lambda \cdot E\Big) = det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) = \lambda^2 - I_1\lambda + I_2$$

и докажем, что данный многочлен сохраняется при ортогональных заменах. Для этого рассмотрим произвольную ортогональную замену координат $a = (x, y) \to b = (u, v)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = C^T$$

и вычислим характеристический многочлен в системе b, используя лемму 13.1 и свойства ортогональных матриц:

$$F_b(\lambda) = det\Big(F_b - \lambda E\Big) = det\Big(C^T F_a C - C^T \lambda E C\Big) =$$

$$= det\Big(C^T \cdot (F_a - \lambda E) \cdot C\Big) = det\big(C^T\big) \cdot det\Big(F_a - \lambda E\Big) \cdot det\big(C\big) =$$

$$= det\Big(F_a - \lambda \cdot E\Big) \cdot det\big(C^T\big) \cdot det\big(C\big) = F_a(\lambda) \cdot det\big(C^T \cdot C\big) = F_a(\lambda).$$

Таким образом, многочлены $F_a(\lambda)$ и $F_b(\lambda)$ равны при всех значениях переменной λ. Следовательно, их коэффициенты, равные следу и определителю матриц квадратичной формы f в системах a и b, совпадают. ■

Так как характеристический многочлен квадратичной формы является инвариантом, его можно вычислить в произвольной системе координат. Выбрав систему $b = (u, v)$, в которой квадратичная форма имеет диагональный вид $f(u, v) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2$, запишем характеристический многочлен $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + b_{11}b_{22}.$$

Согласно теореме Виета, корни уравнения $F(\lambda) = 0$ совпадают с числами b_{11} и b_{22}, которые могут быть найдены без привлечения канонической системы координат.

$\circlearrowleft$ Характеристический многочлен кривой второго порядка

$$-3x^2 + 3y^2 + 8xy + ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — произвольное числа, имеет вид

$$F(\lambda) = det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 25.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 25 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \pm 5$, совпадающие с коэффициентами квадратичной формы в канонической системе координат, равны по модулю и противоположны по знаку. Следовательно, исходное уравнение определяет равностороннюю гиперболу или пару прямых (в зависимости от чисел a, b, c), которые пересекаются под прямым углом.

Теорема 14.3. *Определитель матрицы размера* 3×3*, составленный из всех коэффициентов уравнения кривой второго порядка*

$$I_3 = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

является инвариантом ортогональных замен координат.

□ Противопоставим функции $F_a(x,y)$, определяющей уравнение кривой второго порядка в системе $a=(x,y)$, квадратичную форму трех переменных $G_a(x,y,z)$ по следующему правилу:

$$F_a(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0 \quad \to \quad G_A(x,y,z)=$$

$$=z^2\cdot F_a\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1xz+2a_2yz+a_0z^2.$$

При таком соответствии, число I_3 совпадает с матрицей квадратичной формы G, записанной в системе координат $A=(x,y,z)$. Замена координат $a=(x,y)\to b=(u,v)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11}u+c_{12}v+x_0 \\ c_{12}u+c_{22}v+y_0 \end{pmatrix}$$

приводит к изменению функции F

$$F_a(x,y) \quad \to F_b(u,v)=F_a(c_{11}u+c_{12}v+x_0,c_{12}u+c_{22}v+y_0)$$

и порождает замену координат $A=(x,y,z)\to B=(u,v,w)$ в квадратичной форме G:

$$G_B(u,v,w)=w^2\cdot F_b\left(u/w,v/w\right)=$$

$$=w^2\cdot F_a\left(c_{11}\frac{u}{w}+c_{12}\frac{v}{w}+x_0,c_{12}\frac{u}{w}+c_{22}\frac{v}{w}+y_0\right)=$$

$$=G_A(c_{11}u+c_{12}v+x_0w,c_{12}u+c_{22}v+y_0w,w).$$

Матрица перехода $D=D_{A\to B}$ имеет вид

$$D=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а ее определитель совпадает с определителем матрицы перехода $C=C_{a\to b}$, который в силу ортогональности равен ±1:

$$C\cdot C^T=E \quad \Rightarrow det(C\cdot C^T)=(det\ C)^2=1 \quad \Rightarrow det\ C=\pm1.$$

Согласно лемме 13.1 (точнее, ее аналогу для квадратичных форм трех переменных), определитель матрицы квадратичной формы G не меняется:

$$det\ G_B = det(D^T \cdot G_A \cdot D) = det\ G_A \cdot (det\ D)^2 = det\ G_A,$$

следовательно, число I_3 остается инвариантным. ■

↻ Определим тип кривой второго порядка

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + c = 0$$

в зависимости от параметра c, используя инварианты

$$I_1 = 15, \quad I_2 = 50, \quad I_3 = det \begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & c \end{pmatrix} = 50(c-3).$$

Составим характеристическое уравнение для квадратичной формы кривой и найдем его корни:

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 10.$$

После перехода к канонической системе координат уравнение кривой примет вид

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5u^2 + 10v^2 + \mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5u^2 + 10v^2 = -\mu. \quad (6)$$

Неизвестный коэффициент μ можно определить с помощью третьего инварианта:

$$\mu = \frac{I_3}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{50(c-3)}{50} = c - 3.$$

Следовательно, возможны три случая:

- при $c < 3$ уравнение (6) определяет действительный эллипс с полуосями $\sqrt{\frac{c-3}{5}}$ и $\sqrt{\frac{c-3}{10}}$;
- при $c = 3$ геометрическим решением служит точка;
- при $c > 3$ уравнение соответствует пустому множеству. ↺

14.3 Типовые задачи

Образцы решений

Пример 1. Не производя замену координат, установить, что уравнение второго порядка

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$$

определяет пару совпадающих прямых.

Решение. Преобразуем квадратичную часть уравнения, используя формулу сокращенного умножения, а в линейной части вынесем общий множитель:

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3y)^2 + 4(x-3y) + 4 = 0.$$

Та же формула сокращенного умножения, примененная повторно, приводит нас к искомому результату:

$$(x-3y)^2 + 4(x-3y) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3y+2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-3y+2 = 0.$$

Ответ: данное уравнение определяет прямую $x - 3y + 2 = 0$.

Пример 2. Изобразить кривую второго порядка, заданную уравнением

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0,$$

описать ее каноническое уравнение.

Решение. Для упрощения квадратичной части уравнения совершим поворот системы координат на угол

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{9-16}{-24} = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{7}{24}.$$

Найдем значения тригонометрических функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ с помощью формул двойного аргумента:

$$\beta = \operatorname{arcctg}\frac{7}{24} \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}} = \frac{7}{25} \;\Rightarrow$$

$$\sin\alpha = \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Запишем формулы замены координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \dfrac{4u-3v}{5} \\ y = \dfrac{3u+4v}{5} \end{cases}$$

и преобразуем уравнение второго порядка:

$$9\left(\frac{4u-3v}{5}\right)^2 - 24\cdot\frac{4u-3v}{5}\cdot\frac{3u+4v}{5} + 16\left(\frac{3u+4v}{5}\right)^2 -$$

$$-20\cdot\frac{4u-3v}{5} + 110\cdot\frac{3u+4v}{5} - 50 = 0 \;\Leftrightarrow\; 25v^2+50u+100v-50=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad v^2+2u+4v-2=0 \;\Leftrightarrow\; (v+2)^2+2u-6=0.$$

Для нахождения канонического уравнения перенесем начало координат и перенаправим ось ординат в противоположную сторону:

$$\begin{cases} p = v+2 \\ q = -(u-3) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (v+2)^2+2u-6=0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}p^2.$$

В заключении сделаем чертеж, на котором представлена заданная кривая второго порядка и отражены замены координат:

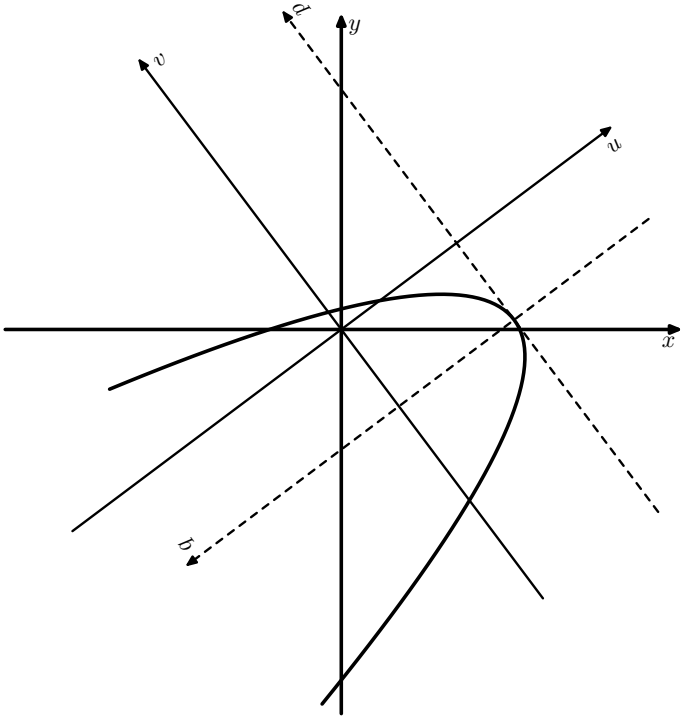


Рис. 69.

Ответ: кривая второго порядка представляет собой параболу с каноническим уравнением $q = \frac{1}{2}p^2$.

Пример 3. Для каждого значения параметра $\alpha \in [0, \pi)$ определить количество общих точек прямой l и кривой второго порядка c, если

$$l:\ (y-1)\cos\alpha = (x-4)\sin\alpha, \quad c:\ 9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50 = 0.$$

Решение. Отметим, что для любого значения параметра α указанная прямая проходит через точку $A(4,1)$. Следовательно, при

изменении параметра α прямая l совершает вращение вокруг этой точки. Перепишем уравнение прямой l в стандартном виде

$$(y-1)\cos\alpha = (x-4)\sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad x\sin\alpha - y\cos\alpha - 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0$$

и определим координаты нормального вектора $\vec{n} = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$ и направляющего вектора $\vec{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Последнее равенство позволяет интерпретировать параметр α как угол наклона прямой l к оси Ox и записать соответствующее параметрическое уравнение

$$x = 4 + t\cos\alpha,\ y = 1 + t\sin\alpha,\ t \in \mathbb{R}.$$

Для определения количества общих точек подставим представления $x(t)$ и $y(t)$ в уравнение кривой c:

$$9(4+t\cos\alpha)^2 - 24(4+t\cos\alpha)(1+t\sin\alpha) + 16(1+t\sin\alpha)^2 -$$

$$-20(4+t\cos\alpha) + 110(1+t\sin\alpha) - 50 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (3\cos\alpha - 4\sin\alpha)^2 t^2 + 2t(14\cos\alpha + 23\sin\alpha) + 44 = 0.$$

Полученное выражение представляет собой квадратный трехчлен, а так как его старший коэффициент зависит от параметра, следует рассмотреть два варианта.

1. Сначала исследуем взаимное расположение кривой c и прямой l в том случае, когда старший коэффициент обращается в нуль:

$$(3\cos\alpha - 4\sin\alpha)^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ 3\cos\alpha - 4\sin\alpha = 0 \ \xrightarrow{\alpha\in[0,\pi)}\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

В этом случае квадратное уравнение превращается в линейное

$$(3\cos\alpha - 4\sin\alpha)^2 t^2 + 2t(14\cos\alpha + 23\sin\alpha) + 44 = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t\left(14\cdot\frac{4}{5} + 23\cdot\frac{3}{5}\right) + 44 = 0$$

и имеет единственное решение $t = -0,88$.

2. При других значениях параметра старший коэффициент будет строго положительным, поэтому количество решений определяется знаком дискриминанта:

$$D/4 = (14\cos\alpha + 23\sin\alpha)^2 - 44(3\cos\alpha - 4\sin\alpha)^2 =$$
$$= -25(7\sin^2\alpha - 68\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha).$$

Дискриминант обращается в нуль при $\alpha_{1,2} = \operatorname{arctg}\frac{34\pm10\sqrt{11}}{7}$, а его знак (с учетом ограничения $\alpha \in [0,\pi)$) изменяется в соответствии со следующей таблицей:

$\alpha \in [0,\alpha_1)$	$\alpha = \alpha_1$	$\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2)$	$\alpha = \alpha_2$	$\alpha \in (\alpha_2,\pi)$
$D<0$	$D=0$	$D>0$	$D=0$	$D<0$

Для демонстрации возможных взаимных расположений параболы c и прямой l сделаем рисунок.

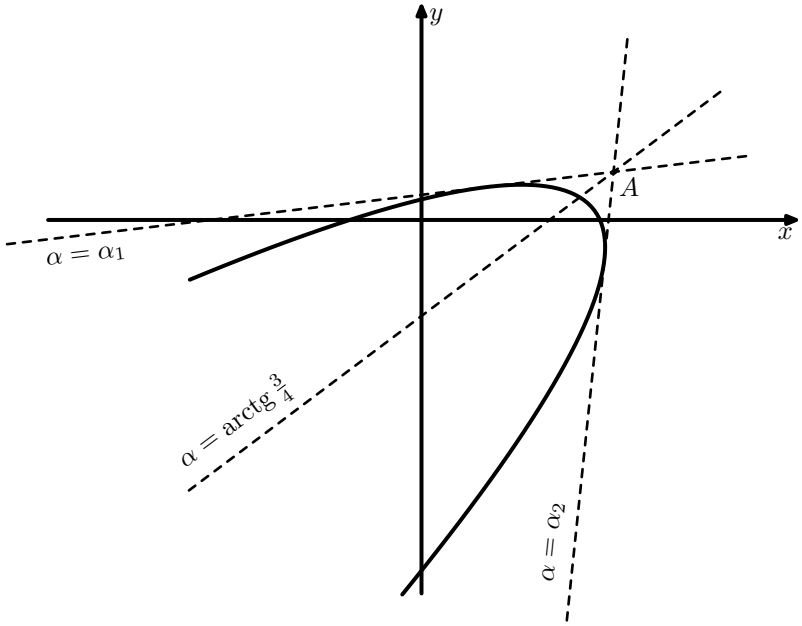


Рис. 70.

Отметим, что при $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ прямая l становится параллельной оси симметрии параболы, а значения $\operatorname{arctg}\frac{34\pm10\sqrt{11}}{7}$ соответствуют касательным.

Ответ: если $\alpha \in \left[0, \operatorname{arctg}\frac{34-10\sqrt{11}}{7}\right) \cup \left(\operatorname{arctg}\frac{34+10\sqrt{11}}{7}, \pi\right)$, то общих точек нет;
если $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{34\pm10\sqrt{11}}{7}$ или $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, то существует единственная общая точка;
если $\alpha \in \left(\operatorname{arctg}\frac{34-10\sqrt{11}}{7}, \operatorname{arctg}\frac{34+10\sqrt{11}}{7}\right)$, то кривая c и прямая l пересекаются в двух точках.

Пример 4. Доказать, что квадратичная часть уравнения кривой второго порядка представляет собой полный квадрат (с точностью до множителя) тогда и только тогда, когда ее первый инвариант равен нулю.

Решение. Необходимость. Рассмотрим уравнение кривой второго порядка c, квадратичная часть которого представляет полный квадрат

$$c: \ a \cdot (\alpha x + \beta y)^2 + a_1 x + a_2 y + a_0 = 0,$$

и проверим, что ее первый инвариант равен нулю:

$$I_1 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = (a\alpha^2) \cdot (a\beta^2) - (a\alpha\beta)^2 = 0.$$

Достаточность. Предположим, что первый инвариант уравнения равен нулю:

$$I_1 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{11} \cdot a_{22} = a_{12}^2 \quad \Leftrightarrow \quad a_{12} = \pm\sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}.$$

Если смешанное произведении переменных в уравнении отсутствует, $a_{12} = 0$, то один из старших коэффициентов в силу последнего равенства обращается в нуль: $a_{11} = 0$ или $a_{22} = 0$. При этом квадратичная часть уравнения принимает вид $a_{22}y^2$ или $a_{11}x^2$ соответственно, представляя собой полный квадрат (с точностью до множителя).

В противном случае, $a_{12} \neq 0$, произведение старших коэффициентов $a_{11} \cdot a_{22}$ строго положительно, поэтому они являются числами одного знака. При этом квадратичную часть можно представить в виде полного квадрата следующим образом:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2 = \left[\begin{array}{ll} \left(\sqrt{a_{11}}x \pm \sqrt{a_{22}}y\right)^2, & a_{11} > 0, a_{22} > 0 \\ -\left(\sqrt{-a_{11}}x \mp \sqrt{-a_{22}}y\right)^2, & a_{11} < 0, a_{22} < 0 \end{array} \right. .$$

Пример 5. Не проводя преобразования координат, установить, что кривая второго порядка

$$q: \ 41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$$

представляет собой эллипс, и найти его полуоси.

Решение. Используя инварианты I_1, I_2, I_3, определим коэффициенты канонического уравнения данной кривой. Для этого сначала составим характеристический многочлен и найдем его корни:

$$\left| \begin{array}{cc} 41-\lambda & 12 \\ 12 & 9-\lambda \end{array} \right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 50\lambda + 225 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 45. \end{array} \right.$$

Затем вычислим третий инвариант:

$$I_3 = \left| \begin{array}{ccc} 41 & 12 & 12 \\ 12 & 9 & 9 \\ 12 & 9 & -36 \end{array} \right| \xrightarrow{(3)-(2)} \left| \begin{array}{ccc} 41 & 12 & 12 \\ 12 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & -45 \end{array} \right| = -45 \cdot 225.$$

Составим каноническое уравнение:

$$5u^2 + 45v^2 - 45 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{9} + v^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{3^2} + \frac{v^2}{1^2} = 1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 3$ и $b = 1$.

Ответ: полуоси эллипса равны 3 и 1.

Пример 6. Не проводя преобразование координат, установить, что кривая второго порядка

$$q:\ 5x^2+4xy+y^2-6x-2y+2=0$$

представляет собой точку, и найти ее координаты.

Решение. Составим характеристический многочлен для квадратичной формы данного уравнения и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2-6\lambda+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 3+2\sqrt{2} \\ \lambda_2 = 3-2\sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Вычислим третий инвариант данного уравнения:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10+6+6-(9+5+8) = 0.$$

Перейдем к каноническим кооординатам (u,v):

$$5x^2+4xy+y^2-6x-2y+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1\cdot u^2+\lambda_2\cdot v^2+\gamma=0.$$

Так как в новой системе координат $I_3=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\gamma=\gamma$, неизвестный параметр γ равен 0. Таким образом, каноническое уравнение кривой q принимает вид $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2=0$, в котором старшие коэффициенты λ_1 и λ_2 имеют одинаковый знак, и определяет единственную точку $M(x_0,y_0)$.

В силу единственности решения первоначальное уравнение обязано распадаться на сумму двух квадратов:

$$5x^2+4xy+y^2-6x-2y+2=(ax+by+c)^2+(px+qy+r)^2.$$

При этом неизвестные (x_0,y_0) являются решением соответствующей системы линейных уравнений:

$$M:\ \left\{ \begin{array}{l} ax_0+by_0+c=0 \\ px_0+qy_0+r=0 \end{array} \right. . \qquad (7)$$

Если вычислить производные

$$\Big((ax+by+c)^2+(px+qy+r)^2\Big)'_x = 2a(ax+by+c)+2p(px+qy+r),$$

$$\Big((ax+by+c)^2+(px+qy+r)^2\Big)'_y = 2b(ax+by+c)+2q(px+qy+r),$$

и подставить в них координаты точки M, то в силу системы (7) получатся нули:

$$2a(ax_0+by_0+c)+2p(px_0+qy_0+r) = 2a\cdot 0+2p\cdot 0 = 0,$$

$$2b(ax_0+by_0+c)+2q(px_0+qy_0+r) = 2b\cdot 0+2q\cdot 0 = 0.$$

Следовательно, пара (x_0, y_0) является решением системы

$$\begin{cases} (5x^2+4xy+y^2-6x-2y+2)'_x = 0 \\ (5x^2+4xy+y^2-6x-2y+2)'_y = 0, \end{cases}$$

которая является линейной:

$$\begin{cases} 10x_0+4y_0-6=0 \\ 4x_0+2y_0-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-1 \end{cases}.$$

Ответ: $M(1,-1)$.

Пример 7. Доказать, что кривая второго порядка, заданная уравнением

$$2x^2-xy-3y^2-3x+7y-2=0,$$

представляет собой пару пересекающихся прямых, и выписать их уравнения.

Решение. Для определения типа кривой вычислим ее инварианты I_2 и I_3:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1/2 & -3/2 \\ -1/2 & -3 & 7/2 \\ -3/2 & 7/2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если перейти к канонической системе координат с помощью поворота на угол $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}(-5)$ и последующего параллельного переноса, то данное уравнение примет вид

$$\lambda \cdot u^2 + \mu \cdot v^2 + \gamma = 0,$$

в котором инварианты I_2 и I_3 равны соответственно

$$I_2 = \lambda \cdot \mu, \quad \text{и} \quad I_3 = \lambda \cdot \mu \cdot \gamma.$$

Отсюда следует, что свободный коэффициент γ равен нулю, а старшие коэффициенты λ и μ противоположны по знаку. Следовательно, кривая представляет собой пару пересекающихся прямых. Чтобы выписать их уравнения воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

Так как исходное уравнение должно распадаться на произведение линейных множителей, можно подобрать числа a, b, c, d, такие, что

$$2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y - 2 = (2x + ay + b) \cdot (x + cy + d).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные

$$2x^2 + (2c + a)xy + acy^2 + (2d + b)x + (ad + bc)y + bd,$$

мы получим систему из пяти нелинейных уравнений:

$$2c + a = -1, \quad ac = -3, \quad 2d + b = -3, \quad bd = -2, \quad ad + bc = 7.$$

Объединив первые четыре уравнение в две независимые системы, найдем возможные значения неопределенных коэффициентов:

$$\left[\begin{array}{l} a = -3,\ c = 1 \\ a = 2,\ c = -3/2 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{l} b = 1,\ d = -2 \\ b = -4,\ d = 1/2. \end{array}\right.$$

Последнему уравнению удовлетворяют только две четверки:

$$a = -3,\ b = 1,\ c = 1,\ d = -2 \quad \text{и} \quad a = 2,\ b = -4,\ c = -3/2,\ d = 1/2.$$

Эти четверки соответствуют разложениям

$$(2x-3y+1)\cdot(x+y-2) \quad \text{и} \quad (2x+2y-4)\cdot(x-3/2y+1/2),$$

которые различаются лишь формально. Таким образом, кривая второго порядка распадается на следующие прямые:

$$2x^2-xy-3y^2-3x+7y-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x-3y+1=0 \\ x+y-2=0. \end{array}\right.$$

Ответ: $2x-3y+1$ и $x+y-2$.

Задачи для самостоятельной работы

Изобразить кривую второго порядка, заданную уравнением, описать ее каноническую систему координат и каноническое уравнение.

199. а) $3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12=0$;
б) $x^2-6xy+y^2-4x-4y+12=0$.

200. а) $x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0$;
б) $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8=0$.

201. а) $x^2-xy+y^2-2x-2y-2=0$;
б) $3x^2+10xy+3y^2-12x-12y+4=0$.

202. а) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;
б) $x^2+2xy+y^2-4x-4y+3=0$.

203. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{2x^2-7x+5}{x-2}$.

204. Найти центр эллипса, заданного уравнением

$$12x^2-4xy+8x+15y^2-60y-116=0.$$

205. Найти асимптоты гиперболы, заданной уравнением

$$12xy + 12x + 5y^2 + 22y - 19 = 0.$$

206. Найти расстояние от фокуса параболы до ее директрисы параболы, если она задана уравнением

$$4x^2 - 12xy + 82x + 9y^2 - 84y + 235.$$

207. Показать, что уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ определяет дугу параболы и найти ее вершину.

Используя инварианты кривых второго порядка, определить тип линии, соответствующей данному уравнению.

208. а) $x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 14y + 15 = 0$;

б) $x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.

209. а) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y + 2 = 0$;

б) $4x^2 - 12xy + 4x + 9y^2 + 46y + 1 = 0$.

210. а) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$;

б) $4x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x + 10y - 7 = 0$.

211. Доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$ задает равностороннюю гиперболу тогда и только тогда, когда $I_1 = 0$ и $I_3 \neq 0$.

212. Доказать, условия $I_1^2 = 4I_2$ и $I_1 \cdot I_3 < 0$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы уравнение кривой второго порядка определяло действительную окружность.

213. С помощью инвариантов выразить необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ задавало гиперболу, лежащую в острых углах, образованном ее асимптотами.

Ответы и указания

1. а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$. **3**. $\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -10 & 23 \end{pmatrix}$.

5. Рассмотреть матрицы со элементами $b_{ij} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$, $c_{ij} = \frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}$.

6. а) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$; б) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7. $\begin{pmatrix} -4 & 7 & -3 \\ 6 & -8 & 8 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. **9**. а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $Y+2E$, $Y = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & c \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\alpha & \frac{\cos^2\alpha}{c} \\ c & -\sin\alpha \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

12. а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \frac{2+3c_1}{2} & \frac{3+3c_2}{2} \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

15. а) $A^{2n} = E$, $A^{2n-1} = A$; б) $B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

16. 380. **17**. $43\frac{1}{3}$ %. **18**. $\frac{40}{3}$, 40, 10. **19**. 1385.

20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

21. Несовместная система из трех уравнений с двумя переменными, в которой любые два уравнения образуют определенную систему.

22. а) Система имеет единственное решение $(-2, 1)$; б) система имеет бесконечное множество решений; в) система несовместна.

23. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$.

24. $\begin{cases} x + 3y + z - 9 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + 5y - 8 = 0 \\ x + 2z - 10 = 0 \end{cases}$.

25. $y(x) = ax^2 - (3a+2)x + 2a + 1,\ a \in \mathbb{R}$.

26. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

27. Да, например, следующие системы эквивалентны:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 = -3. \end{cases}$

28. $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

29. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

30 $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ x - y - z = -1, \\ 2x + y - z = 2; \end{cases}$ $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Исходная система имеет единственное решение $(1, 1, 1)$, преобразованная, $4x + 2y - z = 5$, является неопределенной.

31.

а) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ б) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

32.

а) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ б) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 15 \end{array}\right)$

33. а) неопределенная; б) несовместная.

34. а) определенная; б) неопределенная.

35. а) $(0,0,0)$; б) $c_1{\cdot}(4,0,0,-9,3)+c_2{\cdot}(0,2,0,-3,1)+c_3{\cdot}(0,0,1,-2,1)$.

36. а) $(0,0,0,0,0,0)$; б) $(1,2,3,4,5,6)$.

37. а) система не имеет решений;
б) $(-\frac{1}{2},0,0,1,0)+c_1(-7,12,0,0,0)+c_2(-5,0,4,0,0)+c_3(-7,0,0,-4,8)$.

38. Проверить, что разность двух решений неоднородной системы является решением соответствующей однородной.

39. Приведением основной матрицы к ступенчатому виду доказать, что фундаментальная система решений содержит ровно одну свободную переменную.

40. а) При $\lambda = 0$ система несовместна. В противном случае общее решение системы имеет вид $(\frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}c, \frac{9\lambda-16}{5\lambda} - \frac{8}{5}c, c, \frac{1}{\lambda}), c \in \mathbb{R}$.
б) $(c_1, 4 + 2c_1 - 2c_2, 3 - 2c_2, c_2),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ при $\lambda = 8$,
$(0, 4 - 2c, 3 - 2c, c),\ c \in \mathbb{R}$ при $\lambda \neq 8$.

41. а) При $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0$ система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2}$, при $\lambda = 1$ общее решение имеет вид $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, где x_2, x_3 — свободные переменные, при $\lambda = -2$ система несовместна.

б) При $\lambda(\lambda+3)\neq 0$ система имеет единственное решение $x_1=2-\lambda^2$, $x_2=2\lambda-1$, $x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1$, при $\lambda=0$ общее решение имеет вид $x_1=-x_2-x_3$, где x_2, x_3 — свободные переменные, при $\lambda=-3$ общее решение имеет вид $x_1=x_2=x_3$, где x_3 — свободная переменная.

42, **43**. Система должна быть однородной. **44**. $\lambda=-4$.

45. а) Образуют; б) не образуют.

46. а) 6; б) 20. **47**. а) $abc+abx+acx+bcx$; б) $1+a^2+b^2+c^2$.

49. ± 1. **51**. 4. **52**. 0. **53**. $-2x$. **54**. $1-x^2$.

55. а) 1; б) 10. **56**. а) 52; б) 5. **58**. 0. **59**. 11.

61. а) $8a+15b+12c-19d$; б) $2a-8b+c+5d$.

62. а) 30; б) 0. **63**. а) $n+1$; б) $2^{n+1}-1$. **64**. 1. **65**. $n\cdot(-1)^{n-1}$.

66. а) $x=2, y=-1$; б) $x=-1, y=3$.

67. а) $x=1, y=-2, z=1$; б) $x=2, y=-2, z=2$. **68**. $a=5$.

69. а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \frac{7}{29} & \frac{4}{29} \\ -\frac{2}{29} & \frac{3}{29} \end{pmatrix}$.

70. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

71. а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

72. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **73**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

76. а) линейно независимая; б) линейно независимая.

79. а) $(0,0,0,1)$; б) $(0,0,1,0), (0,0,0,1)$.

82. а) $(1,2,3)$; б) $(1,1,1)$.

84. Dim S $= 3$, базис образован 1-м, 2-м и 4-м векторами.

85. Dim S $= 3$, базис образован 1-м, 2-м и 5-м векторами.

86. $CH_4 + O_2 = CH_2O + H_2O$.

87. $CO_2 + 2H_2O = HCO_3^- + H_3O^+$.

88. $a_0 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 2, \quad a_1 = a_3 + 2a_4 + 2$.

89. $CO + H_2 = CH_3OH, \quad CO_2 + H_2 = CO + H_2O$.

91. а) 2; б) 3.

93. а) $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_4\}$ — базис системы строк,
$\vec{r}_1 = (1,0,0),\ \vec{r}_2 = (0,1,0),\ \vec{r}_3 = (2,-3,0),\ \vec{r}_4 = (0,0,1)$;
$\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_5\}$ — базис системы столбцов,
$\vec{c}_1 = (1,0,0),\ \vec{c}_2 = (0,1,0),\ \vec{c}_3 = (\frac{7}{4}, \frac{9}{4}, 0),\ \vec{c}_4 = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0), \vec{c}_5 = (0,0,1)$;
б) $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ — базис системы строк,
$\vec{r}_1 = (1,0),\ \vec{r}_2 = (0,1),\ \vec{r}_3 = (3,-1),\ \vec{r}_4 = (-3,2),\ \vec{r}_5 = (-4,3)$;
$\{\vec{c}_1, \vec{c}_3\}$ — базис системы столбцов,
$\vec{c}_1 = (1,0),\ \vec{c}_2 = (\frac{3}{4}, 0),\ \vec{c}_3 = (0,1),\ \vec{c}_4 = (\frac{1}{2}, 0), \vec{c}_5 = (-\frac{11}{12}, -\frac{4}{3})$.

94. $\vec{a}_1, \vec{a}_3,\ \vec{a}_1, \vec{a}_4,\ \vec{a}_2, \vec{a}_3,\ \vec{a}_2, \vec{a}_4$.

95. λ — любое число.

96. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ — базис, $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

97. а) При $\lambda = 0$ ранг равен 2, при $\lambda \neq 0$ он равен 3; б) при $\lambda = 3$ ранг равен 2, при $\lambda \neq 3$ он равен 3.

98. а) $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

99. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **100**. $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **101**. $C = -E$.

104. а) не образуют; б) образуют.

105. $\sqrt{2}$.

107. $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{FD} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

108. а) $(-1, -3)$; б) $(1, 3)$; в) $(1, -3)$; г) $(7, -1)$; д) $(3, -1)$; е) $(-3, 1)$.

109. $\frac{5}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$. **110**. $7S$. **111**. $(-2, 3)$. **112**. $\arcsin \frac{14}{5\sqrt{29}}$.

114. $2 \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{5}}{10}$. **115**. $\arccos \frac{\sqrt{22}}{33}$. **116**. $\dfrac{mnp}{(m^2+n^2+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot d^3$.

117. 72. **118**. $4\sqrt{3}$. **119**. $d^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$.

120. $3\sqrt{10}$. **121**. $(x - \frac{7}{2})^2 + (y-2)^2 = \frac{125}{4}$. **122**. $2x + y - 2 = 0$.

123. $y = 7$ или $y = \frac{3}{4}x + 7$. **124**. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 20$. **125**. 5.

126. $\frac{9}{\sqrt{10}}$. **127**. $2\sqrt{2}$. **128**. $y = 4x - 4$, $F' = \left(2, -\frac{1}{4}\right)$. **129**. $(2, 2)$.

130. $4x^2 - 4xy + y^2 + 16x - 18y + 21 = 0$; M лежит внутри параболы.

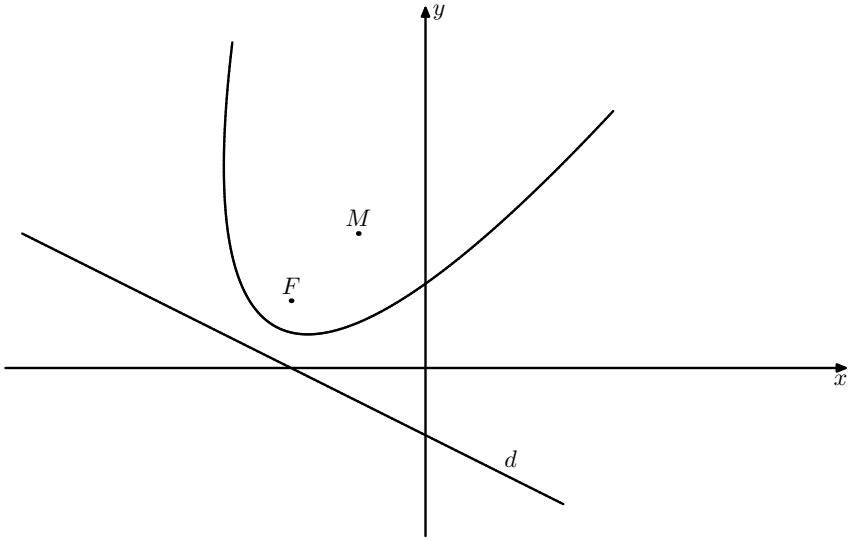


Рис. 71.

131. $x+2y+8=0$. **133**. $P\left(\frac{17}{5},-\frac{1}{5}\right)$, $4x+3y-13=0$.

134. а) 50; б) $\frac{25}{4}(10-\pi)$; в) $\frac{25}{4}(6-\pi)$. **135**. 8π; б) 6π; в) $4\pi+4$.

136. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **137**. $\arcsin\frac{22}{3\sqrt{102}}$. **138**. $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{23}}$. **139**. $\arccos\frac{5}{\sqrt{861}}$, $\frac{20}{\sqrt{209}}$.

140. $\frac{a}{\sqrt{10}}$, $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{35}}$. **141**. $x=-2+13t$, $y=-3t$, $z=3-12t$. **142**. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

143. AB; в любом отношении от 0 до $\frac{1}{56}$, считая от вершины A.

144. $\arccos\frac{2}{3}$ или $\arccos\frac{1}{6}$. **145**. $\arccos\frac{98}{195}$. **146**. Пересекаются.

147. $(5,-1,0)$. **148**. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.

149. Эллипс $5x^2-8xz+5z^2-74x+70z+274=0$.

150. $10x-11y-2z+189=0$ и $10x-11y-2z-261=0$.

151. $(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=121$. **152**. $(x-4)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=25$.

153. $(x,y,z)=(1+t,-2,1-t)$, $t\in\mathbb{R}$.

154. $M_1(-1,1,-1)$, $M_2\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$.

157. $(x,y,z)=(\sqrt{21}\cos t,-2,\sqrt{21}\sin t)$, $t\in[0,2\pi)$.

158. $\frac{1}{9}(10,-20,20)+\frac{\sqrt{224}}{3}(2,-1,-2)\cos t+\frac{\sqrt{224}}{3}(2,2,1)\sin t$ $t\in[0,2\pi)$.

159. $\begin{cases} y+2z=0, \\ x-5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-5z=0, \\ y+4=0. \end{cases}$

160. $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{-2}$, $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-4}$.

161. $\arccos\frac{1}{17}$.

162. $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$.

163. $35(x^2+y^2)-52z^2-116(2xy+xz-yz)+232x-70y-116z+35=0$.

164. $9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=0$.

165. $x^2-y^2-2xz+2xy+x+y-2z=0$.

166. $5x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz+4yz-6=0$.

167. $5x^2+10y^2+13z^2+12xy-6xz+4yz+26x+20y-38z+3=0$.

168. Точки A и E лежат на эллипсе, точки B и G лежат внутри эллипса, точки C и D лежат вне эллипса.

169. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ или $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **170**. $(\pm5,\pm2)$. **171**. $24\sqrt{2}/5$.

172. Окружность с центром, расположенном в начале канонической системы координат.

173. $4x+9y-13=0$.

174. $y=3$ и $12x+7y+51=0$.

175. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

176. Ветка гиперболы с фокусами O_1, O_2 и расстоянием $2a=|R_2-R_1|$.

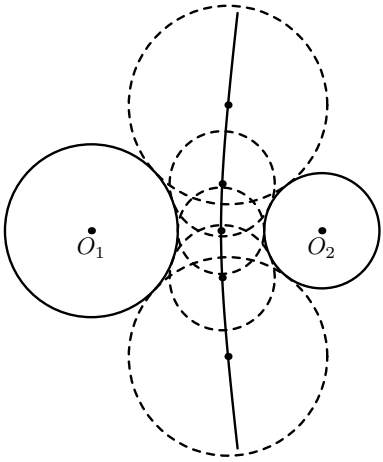


Рис. 72.

177. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$.

178. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

179. $r_1=9,\ r_2=19,\ \operatorname{tg}\alpha=28\sqrt{2}/41$.

180. $x-2y-12=0$ и $x+2y+8=0$.

181. $8x\pm\sqrt{11}y-20=0$.

183. $F_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $F_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

184. $O'(1,2)$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.

185. $u=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+2$, $v=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$, $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

186. $u=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+2$, $v=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$, $y=\sqrt{3}(x-1)$.

187. $u=\frac{1}{2}\left(x_0-y_0\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)$, $v=\frac{1}{2}\left(x_0\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}+y_0\right)$.

188. а) $u^2+4v^2=16$; б) $u^2-4v^2=16$.

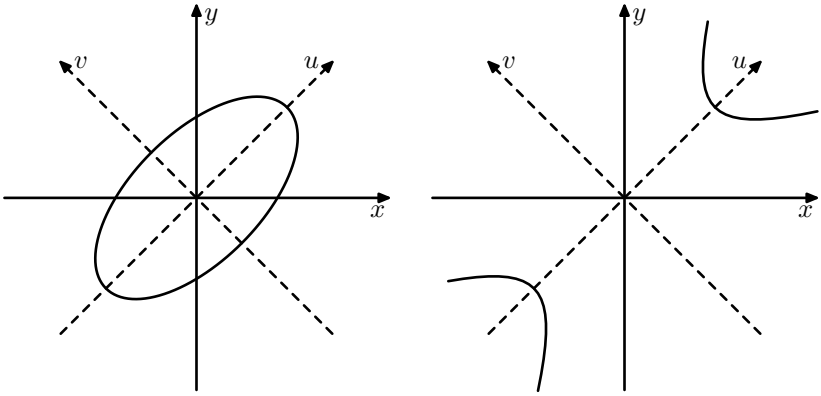


Рис. 73.

189. а) $uv = -6$, $O' = (1, 2)$; б) $uv = 4$, $O' = (-2, 1)$.

190. а) $45°$; б) $\operatorname{arctg} 2$. **191**. $u^2 + 2v^2 = 4$, $F_1(1, 1)$, $F_2(-1, -1)$.

192. $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) u + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) v + 1 = 0$.

193. $O' = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\vec{e}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, каноническое уравнение: $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{3/4} = 1$, уравнение в стандартной системе координат: $28x^2 - 48xy - 28x + 48y^2 + 24y - 41 = 0$ (см. рисунок 74).

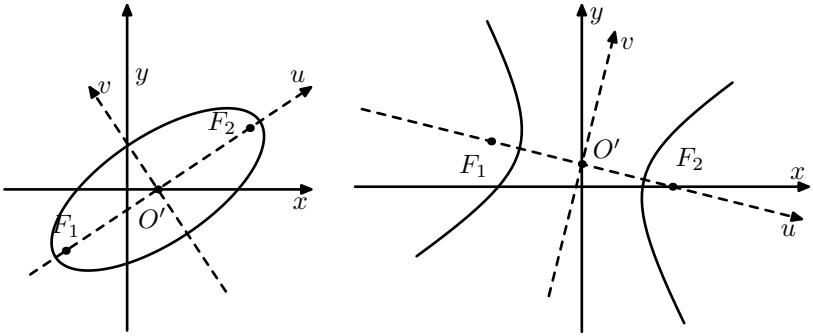


Рис. 74.

194. $O' = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}_1 = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$, каноническое уравнение: $\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{1/4} = 1$, уравнение в стандартной системе координат: $-32xy + 16x - 60y^2 + 60y - 31 = 0$ (см. рисунок 74).

195. $(-1, 0) + 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cos t + \sqrt{17} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$.

196. $(1, -1) \pm 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \operatorname{ch} t + 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R}$.

197. $48x - 14y - 21 = 0$ и $y = -\frac{3}{2}$.

198. $\left(-\frac{12}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$.

199. а) $\frac{u^2}{8} + \frac{v^2}{4} = 1$, $\quad B = (1, 1)$, $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$;
б) $\frac{u^2}{8} - \frac{v^2}{4} = 1$, $\quad B = (-1, -1)$, $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.

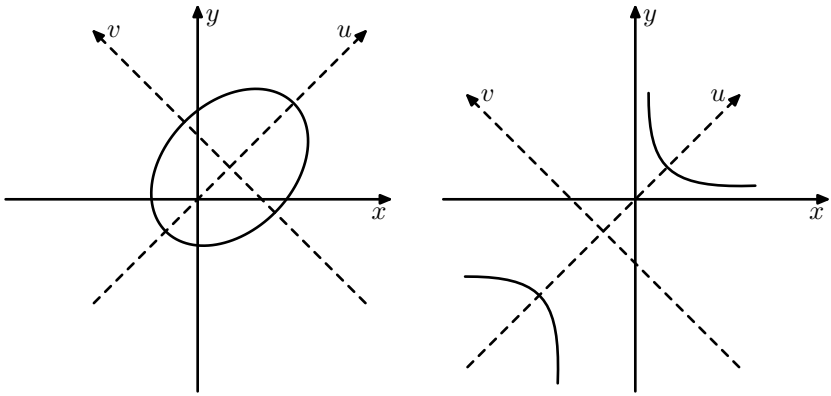


Рис. 75.

200. а) $v = \frac{1}{2\sqrt{5}}u^2$, $\quad B = (-2, 1)$, $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$;
б) $u^2 = \frac{1}{5}$, $\quad B = \left(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right)$, $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

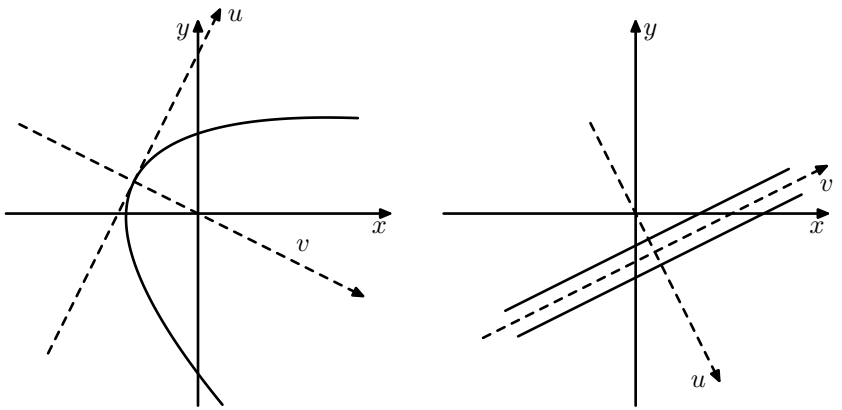


Рис. 76.

201. а) $\frac{u^2}{12}+\frac{v^2}{4}=1$, $\quad B=(2,2)$, $\vec{b}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\vec{b}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$;
б) $\frac{u^2}{5/8}-\frac{v^2}{5/2}=1$, $\quad B=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$, $\vec{b}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\vec{b}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

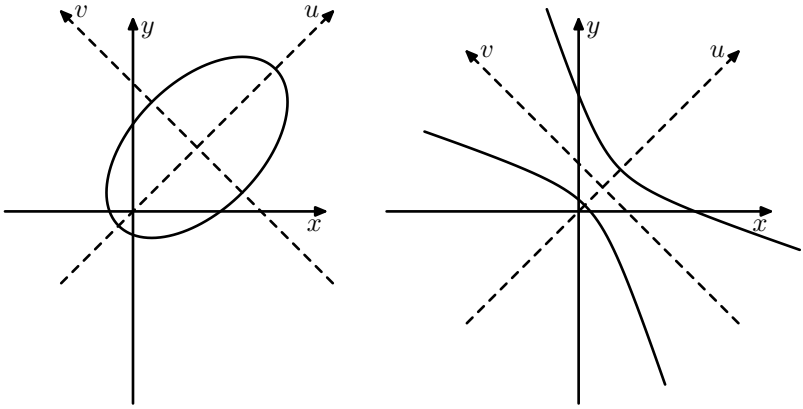


Рис. 77.

202. а) $v=\frac{\sqrt{2}}{8}u^2$, $\quad B=(2,1)$, $\vec{b}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, $\vec{b}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$;
б) $u^2=\frac{1}{2}$, $\quad B=(1,1)$, $\vec{b}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\vec{b}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

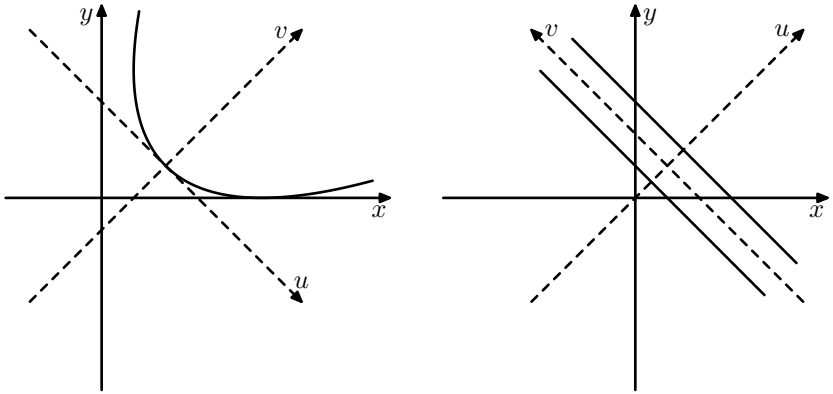


Рис. 78.

203. $x = 2$ и $y = 2x - 3$. **204**. $(0, 2)$.

205. $y = -1$ и $12x + 5y + 17 = 0$.

206. $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **207**. $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$.

208. а) пара пересекающихся прямых $3y = 2x - 7 \pm (x - 2)$;
б) точка $(2, -1)$.

209. а) пара параллельных прямых $4y = -2x - 3 \pm 1$; б) парабола с фокусом в точке $(1, -1)$ и директрисой $3x + 2y - 5 = 0$.

210. а) пара параллельных прямых $y = x - 2 \pm 1$;
б) пара пересекающихся прямых $3y = x - 5 \pm 2(x + 1)$.

213. $I_2 < 0, I_1 \cdot I_3 < 0$.

Литература

[1] Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Физматлит, 2009.

[2] Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. — М.: МЦНМО, 2007.

[3] Степанов Н.Ф., Ерлыкина М.Е., Филиппов Г.Г. Методы линейной алгебры в физической химии. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.

[4] Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. — М.: Наука, 1979.

[5] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1987.

[6] Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1970.

[7] Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.: Физматлит, 2006.

[8] Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Просвещение, 1964.

[9] Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1980.

[10] Сергеев И.Н. Задачи с ответами и решениями: Пособие для поступающих в вузы. — М.: КДУ, 2004.

[11] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнение по математическому анализу. — М.: Физматгиз, 1962.

[12] Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Ю.М. Смирнова. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Логос, 2005.